ITA 2007
MATEMÁTICA

Vestibular

NOTAÇÕES

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$: conjuntodosnúmerosinteiros
$\mathbb{Q}$: conjuntodosnúmerosracionais
$\mathbb{R}$: conjuntodosnúmerosreais
$\mathbb{C}$: conjuntodosnúmeroscomplexos

i: unidadeimaginária;$i^2 = -1$
$|z|$: módulodonúmero$z \in \mathbb{C}$
$\overline{z}$: conjugadodonúmero$z \in \mathbb{C}$
$Re\, z$:升parterealde$z \in \mathbb{C}$
$Im\, z$: parteimagináriade$z \in \mathbb{C}$

$\binom{n}{p}$: número de combinações de n elementos tomados p a p.

$\text{mdc}(j, k)$: máximo divisor comum dos números inteiros j e k.

$n(X)$: número de elementos de um conjunto finito X.

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos ortogonais.

Questão 01. Se A, B, C forem conjuntos tais que

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= 23, \quad n(B - A) = 12, \quad n(C - A) = 10, \\ n(B \cap C) &= 6 \text{ e } n(A \cap B \cap C) = 4, \end{aligned}$$

então $n(A)$, $n(A \cup C)$, $n(A \cup B \cup C)$, nesta ordem,

A ( ) formam uma progressão aritmética de razão 6.
B ( ) formam uma progressão aritmética de razão 2.
C ( ) formam uma progressão aritmética de razão 8, cujo primeiro termo é 11.
D ( ) formam uma progressão aritmética de razão 10, cujo último termo é 31.
E ( ) não formam uma progressão aritmética.

Questão 02. Seja A um conjunto com 14 elementos e B um subconjunto de A com 6 elementos. O número de subconjuntos de A com um número de elementos menor ou igual a 6 e disjuntos de B é

A ( ) $2^8 - 9$. **B** ( ) $2^8 - 1$. **C** ( ) $2^8 - 2^6$. **D** ( ) $2^{14} - 2^8$. **E** ( ) 2^8.

Questão 03. Considere a equação:

$$16\left(\frac{1 - ix}{1 + ix}\right)^3 = \left(\frac{1 + i}{1 - i} - \frac{1 - i}{1 + i}\right)^4.$$

Sendo x um número real, a soma dos quadrados das soluções dessa equação é

A ( ) 3. **B** ( ) 6. **C** ( ) 9. **D**( ) 12. **E** ( ) 15.

Questão 04. Assinale a opção que indica o módulo do número complexo

$$\frac{1}{1 + i \operatorname{cotg} x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A ( ) $|\cos x|$ **B** ( ) $(1 + \operatorname{sen} x)/2$ **C** ( ) $\cos^2 x$
D ( ) $|\operatorname{cossec} x|$ **E** ( ) $|\operatorname{sen} x|$

Questão 05. Considere: um retângulo cujos lados medem B e H, um triângulo isósceles em que a base e a altura medem, respectivamente, B e H, e o círculo inscrito neste triângulo. Se as áreas do retângulo, do triângulo e do círculo, nesta ordem, formam uma progressão geométrica, então B/H é uma raiz do polinômio

A ( ) $\pi^3 x^3 + \pi^2 x^2 + \pi x - 2 = 0.$ **B** ( ) $\pi^2 x^3 + \pi^3 x^2 + x + 1 = 0.$

C ( ) $\pi^3 x^3 - \pi^2 x^2 + \pi x + 2 = 0.$ **D** ( ) $\pi x^3 - \pi^2 x^2 + 2\pi x - 1 = 0.$

E ( ) $x^3 - 2\pi^2 x^2 + \pi x - 1 = 0.$

Questão 06. Se as medidas dos lados de um triângulo obtusângulo estão em progressão geométrica de razão r, então r pertence ao intervalo

A ( ) $\left(0, (1+\sqrt{2})/2\right).$

B ( ) $\left((1+\sqrt{2})/2, \sqrt{(1+\sqrt{5})/2}\right).$

C ( ) $\left(\sqrt{(1+\sqrt{5})/2}, (1+\sqrt{5})/2\right).$

D ( ) $\left((1+\sqrt{5})/2, \sqrt{2+\sqrt{2}/2}\right).$

E ( ) $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}/2}, (2+\sqrt{3})/2\right).$

Questão 07. Sejam x, y e z números reais positivos tais que seus logaritmos numa dada base k são números primos satisfazendo

$$\begin{aligned} \log_k(xy) &= 49, \\ \log_k(x/z) &= 44. \end{aligned}$$

Então, $\log_k(xyz)$ é igual a

A ( ) 52. **B** ( ) 61. **C** ( ) 67. **D** ( ) 80. **E** ( ) 97.

Questão 08. Sejam x e y dois números reais tais que e^x, e^y e o quociente

$$\frac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y\sqrt{5}}$$

são todos racionais. A soma $x + y$ é igual a

A ( ) 0. **B** ( ) 1. **C** ( ) $2\log_5 3.$ **D** ( ) $\log_5 2.$ **E** ( ) $3\log_e 2.$

Questão 09. Seja $Q(z)$ um polinômio do quinto grau, definido sobre o conjunto dos números complexos, cujo coeficiente de z^5 é igual a 1. Sendo $z^3 + z^2 + z + 1$ um fator de $Q(z)$, $Q(0) = 2$ e $Q(1) = 8$, então, podemos afirmar que a soma dos quadrados dos módulos das raízes de $Q(z)$ é igual a

A ( ) 9. **B** ( ) 7. **C** ( ) 5. **D** ( ) 3. **E** ( ) 1.

Questão 10. Sendo c um número real a ser determinado, decomponha o polinômio $9x^2 - 63x + c$, numa diferença de dois cubos

$$(x + a)^3 - (x + b)^3.$$

Neste caso, $|\, a + |\, b\,| - c\,|$ é igual a

A ( ) 104. **B** ( ) 114. **C** ( ) 124. **D**( ) 134. **E** ( ) 144.

Questão 11. Sobre a equação na variável real x,

$$|\,|\,|\, x - 1\,| - 3\,| - 2\,| = 0,$$

podemos afirmar que

A ( ) ela não admite solução real.
B ( ) a soma de todas as suas soluções é 6.
C ( ) ela admite apenas soluções positivas.
D ( ) a soma de todas as soluções é 4.
E ( ) ela admite apenas duas soluções reais.

Questão 12. Determine quantos números de 3 algarismos podem ser formados com 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, satisfazendo à seguinte regra: O número não pode ter algarismos repetidos, exceto quando iniciar com 1 ou 2, caso em que o 7 (e apenas o 7) pode aparecer mais de uma vez. Assinale o resultado obtido.

A ( ) 204 **B** ( ) 206 **C** ( ) 208 **D**( ) 210 **E** ( ) 212

Questão 13. Seja x um número real no intervalo $0 < x < \pi/2$. Assinale a opção que indica o comprimento do menor intervalo que contém todas as soluções da desigualdade

$$\frac{1}{2}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sqrt{3}\left(\cos^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)\sec(x) \geq 0.$$

A ( ) $\pi/2$ **B** ( ) $\pi/3$ **C** ( ) $\pi/4$ **D** ( ) $\pi/6$ **E** ( ) $\pi/12$

Questão 14. Assinale a opção que indica a soma dos elementos de $A \cup B$, sendo:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ x_k = sen^2\left(\frac{k^2\pi}{24}\right) : k = 1, 2 \right\} \text{ e} \\ B &= \left\{ y_k = sen^2\left(\frac{(3k+5)\pi}{24}\right) : k = 1, 2 \right\}. \end{aligned}$$

A ( ) 0 **B** ( ) 1 **C** ( ) 2
D ( ) $\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)/3$ **E** ( ) $\left(2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)/3$

Questão 15. Sejam $A = (a_{jk})$ e $B = (b_{jk})$, duas matrizes quadradas $n \times n$, onde a_{jk} e b_{jk} são, respectivamente, os elementos da linha j e coluna k das matrizes A e B, definidos por

$$a_{jk} = \binom{j}{k}, \quad \text{quando} \quad j \geq k\ , \qquad a_{jk} = \binom{k}{j}, \quad \text{quando} \quad j < k$$

e

$$b_{jk} = \sum_{p=0}^{jk} (-2)^p \binom{jk}{p}.$$

O traço de uma matriz quadrada (c_{jk}) de ordem $n \times n$ é definido por $\sum_{p=1}^{n} c_{pp}$. Quando n for ímpar, o traço de $A + B$ é igual a

A ( ) $n(n-1)/3$. **B** ( ) $(n-1)(n+1)/4$. **C** ( ) $(n^2 - 3n + 2)/(n-2)$.
D ( ) $3(n-1)/n$. **E** ( ) $(n-1)/(n-2)$.

Questão 16. Considere no plano cartesiano xy o triângulo delimitado pelas retas $2x = y$, $x = 2y$ e $x = -2y + 10$. A área desse triângulo mede

A ( ) 15/2. **B** ( ) 13/4. **C** ( ) 11/6. **D** ( ) 9/4. **E** ( ) 7/2.

Questão 17. Sejam $A : (a, 0)$, $B : (0, a)$ e $C : (a, a)$, pontos do plano cartesiano, em que a é um número real não nulo. Nas alternativas abaixo, assinale a equação do lugar geométrico dos pontos $P : (x, y)$ cuja distância à reta que passa por A e B, é igual à distância de P ao ponto C.

A ( ) $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay + 3a^2 = 0$
B ( ) $x^2 + y^2 + 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$
C ( ) $x^2 + y^2 - 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$
D ( ) $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$
E ( ) $x^2 + y^2 + 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$

Questão 18. Seja P_n um polígono regular de n lados, com $n > 2$. Denote por a_n o apótema e por b_n o comprimento de um lado de P_n. O valor de n para o qual valem as desigualdades

$$b_n \leq a_n \quad \text{e} \quad b_{n-1} > a_{n-1},$$

pertence ao intervalo

A ( ) $3 < n < 7$. **B** ( ) $6 < n < 9$. **C** ( ) $8 < n < 11$.
D ( ) $10 < n < 13$. **E** ( ) $12 < n < 15$.

Questão 19. Sejam P_1 e P_2 octógonos regulares. O primeiro está inscrito e o segundo circunscrito a uma circunferência de raio R. Sendo A_1 a área de P_1 e A_2 a área de P_2, então a razão A_1/A_2 é igual a

A ( ) $\sqrt{5/8}$. **B** ( ) $9\sqrt{2}/16$. **C** ( ) $2(\sqrt{2} - 1)$.
D ( ) $(4\sqrt{2} + 1)/8$. **E** ( ) $(2 + \sqrt{2})/4$.

Questão 20. Considere uma pirâmide regular de base hexagonal, cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm. Secciona-se a pirâmide por um plano paralelo à base, obtendo-se um tronco de volume igual a 1 cm^3 e uma nova pirâmide. Dado que a razão entre as alturas das pirâmides é $1/\sqrt{2}$, a altura do tronco, em centímetros, é igual a

A ( ) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$. **B** ( ) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})/3$. **C** ( ) $(3\sqrt{3}-\sqrt{6})/21$.
D ( ) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})/6$. **E** ( ) $(2\sqrt{6}-\sqrt{2})/22$.

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.

Questão 21. Determine o conjunto C, sendo A, B e C conjuntos de números reais tais que

$$\begin{aligned} A\cup B\cup C &= \{x\in\mathbb{R} : x^2+x\geq 2\}, \\ A\cup B &= \left\{x\in\mathbb{R} : 8^{-x}-3\cdot 4^{-x}-2^{2-x}>0\right\}, \\ A\cap C &= \{x\in\mathbb{R} : \log(x+4)\leq 0\}, \\ B\cap C &= \{x\in\mathbb{R} : 0\leq 2x+7<2\}. \end{aligned}$$

Questão 22. Determine o conjunto A formado por todos os números complexos z tais que

$$\frac{\overline{z}}{z-2i}+\frac{2z}{\overline{z}+2i}=3 \quad \text{e} \quad 0<|z-2i|\leq 1.$$

Questão 23. Seja k um número inteiro positivo e

$$A_k=\{\ j\in\mathbb{N} : j\leq k \text{ e } \mathrm{mdc}(j,k)=1\ \}.$$

Verifique se $n(A_3)$, $n(A_9)$, $n(A_{27})$ e $n(A_{81})$, estão ou não, nesta ordem, numa progressão aritmética ou geométrica. Se for o caso, especifique a razão.

Questão 24. Considere a equação:

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x.$$

(a) Para que valores do parâmetro real p a equação admite raízes reais?
(b) Determine todas essas raízes reais.

Questão 25. Sendo x, y, z e w números reais, encontre o conjunto solução do sistema

$$\begin{aligned} \log\left[(x+2y)(w-3z)^{-1}\right] &= 0, \\ 2^{x+3z}-8\cdot 2^{y-3z+w} &= 0, \\ \sqrt[3]{2x+y+6z-2w}-2 &= 0. \end{aligned}$$

Questão 26. Dentre 4 moças e 5 rapazes deve-se formar uma comissão de 5 pessoas com, pelo menos, 1 moça e 1 rapaz. De quantas formas distintas tal comissão poderá ser formada?

Questão 27. Considere um triângulo isósceles ABC, retângulo em B. Sobre o lado $\overline{BC}$, considere, a partir de B, os pontos D e E, tais que os comprimentos dos segmentos $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EC}$, nesta ordem, formem uma progressão geométrica decrescente. Se β for o ângulo $E\widehat{A}D$, determine $\operatorname{tg}\beta$ em função da razão r da progressão.

Questão 28. Considere, no plano cartesiano xy, duas circunferências C_1 e C_2, que se tangenciam exteriormente em $P:(5,10)$. O ponto $Q:(10,12)$ é o centro de C_1. Determine o raio da circunferência C_2, sabendo que ela tangencia a reta definida pela equaçã o $x=y$.

Questão 29. Seja C_1 uma circunferência de raio R_1 inscrita num triângulo equilátero de altura h. Seja C_2 uma segunda circunferência, de raio R_2, que tangencia dois lados do triâ ngulo internamente e C_1 externamente. Calcule $(R_1-R_2)/h$.

Questão 30. Os quatro vértices de um tetraedro regular, de volume $8/3\ cm^3$, encontram-se nos vértices de um cubo. Cada vértice do cubo é centro de uma esfera de 1 cm de raio. Calcule o volume da parte do cubo exterior às esferas.