ITA 2006
MATEMÁTICA

Vestibular

NOTAÇÕES

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$\emptyset$: conjunto vazio
$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$
$\det A$: determinante da matriz A
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B
i : unidade imaginária ; $i^2 = -1$
$z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$
$\bar{z}$: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$
$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
$\mathrm{Re}\, z$: parte real de $z \in \mathbb{C}$
$\mathrm{Im}\, z$: parte imaginária de $z \in \mathbb{C}$
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
$\binom{a}{b}$: combinação de a elementos, b a b, onde a e b são inteiros maiores ou iguais a zero
$P(X)$: conjunto de todos os subconjuntos de X
$n(X)$: número de elementos do conjunto X (X finito)

Obs.: São cartesianos ortogonais os sistemas de coordenadas considerados

Questão 1. Seja E um ponto externo a uma circunferência. Os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{ED}$ interceptam essa circunferência nos pontos B e A, e, C e D, respectivamente. A corda $\overline{AF}$ da circunferência intercepta o segmento $\overline{ED}$ no ponto G. Se $EB = 5$, $BA = 7$, $EC = 4$, $GD = 3$ e $AG = 6$, então GF vale

A ( ) 1 B ( ) 2 C ( ) 3 D ( ) 4 E ( ) 5

Questão 2. Seja U um conjunto não vazio com n elementos, $n \geq 1$. Seja S um subconjunto de $P(U)$ com a seguinte propriedade:

Se $A, B \in S$, então $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Então, o número máximo de elementos que S pode ter é

A ( ) 2^{n-1} B ( ) $n/2$, se n for par, e $(n+1)/2$ se n for ímpar C ( ) $n+1$
D ( ) $2^n - 1$ E ( ) $2^{n-1} + 1$

Questão 3. Sejam A e B subconjuntos finitos de um mesmo conjunto X, tais que $n(B \setminus A)$, $n(A \setminus B)$ e $n(A \cap B)$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $r > 0$. Sabendo que $n(B \setminus A) = 4$ e $n(A \cup B) + r = 64$, então, $n(A \setminus B)$ é igual a

A ( ) 12 B ( ) 17 C ( ) 20 D ( ) 22 E ( ) 24

Questão 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{77}\,\text{sen}[5(x + \pi/6)]$ e seja B o conjunto dado por $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$. Se m é o maior elemento de $B \cap (-\infty, 0)$ e n é o menor elemento de $B \cap (0, +\infty)$, então $m + n$ é igual a

A ( ) $\dfrac{2\pi}{15}$ B ( ) $\dfrac{\pi}{15}$ C ( ) $-\dfrac{\pi}{30}$ D ( ) $-\dfrac{\pi}{15}$ E ( ) $-\dfrac{2\pi}{15}$

Questão 5. Considere a equação $(a^x - a^{-x})/(a^x + a^{-x}) = m$, na variável real x, com $0 < a \neq 1$. O conjunto de todos os valores de m para os quais esta equação admite solução real é

A ( ) $(-1, 0) \cup (0, 1)$ B ( ) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ C ( ) $(-1, 1)$
D ( ) $(0, \infty)$ E ( ) $(-\infty, +\infty)$

Questão 6. Considere uma prova com 10 questões de múltipla escolha, cada questão com 5 alternativas. Sabendo que cada questão admite uma única alternativa correta, então o número de formas possíveis para que um candidato acerte somente 7 das 10 questões é

A ( ) $4^4 \cdot 30$ B ( ) $4^3 \cdot 60$ C ( ) $5^3 \cdot 60$ D ( ) $\dbinom{7}{3} \cdot 4^3$ E ( ) $\dbinom{10}{7}$

Questão 7. Considere as seguintes afirmações sobre a expressão $S = \sum_{k=0}^{101} \log_8\left(4^k \sqrt{2}\right)$:

I. S é a soma dos termos de uma progressão geométrica finita
II. S é a soma dos termos de uma progressão aritmética finita de razão $2/3$
III. $S = 3451$
IV. $S \leq 3434 + \log_8 \sqrt{2}$

Então, pode-se afirmar que é(são) verdadeira(s) apenas

A ( ) I e III B ( ) II e III C ( ) II e IV D ( ) II E ( ) III

Questão 8. Se para todo $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| = |z|$ e $|f(z) - f(1)| = |z - 1|$, então, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\overline{f(1)}f(z) + f(1)\overline{f(z)}$ é igual a

A ( ) 1 B ( ) $2z$ C ( ) $2\,\text{Re}\,z$ D ( ) $2\,\text{Im}\,z$ E ( ) $2|z|^2$

Questão 9. O conjunto solução de $(\operatorname{tg}^2 x - 1)(1 - \operatorname{cotg}^2 x) = 4$, $x \neq k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, é

A ( ) $\left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ B ( ) $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ C ( ) $\left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

D ( ) $\left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ E ( ) $\left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

Questão 10. Se $\alpha \in [0, 2\pi)$ é o argumento de um número complexo $z \neq 0$ e n é um número natural tal que $(z/|z|)^n = i \operatorname{sen}(n\alpha)$, então, é verdade que

A ( ) $2n\alpha$ é múltiplo de 2π
B ( ) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo de 2π
C ( ) $n\alpha - \pi/4$ é múltiplo de $\pi/2$
D ( ) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo não nulo de 2
E ( ) $n\alpha - 2\pi$ é múltiplo de π

Questão 11. A condição para que as constantes reais a e b tornem incompatível o sistema linear $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 5z = 1 \\ 2x + 2y + az = b \end{cases}$ é

A ( ) $a - b \neq 2$ B ( ) $a + b = 10$ C ( ) $4a - 6b = 0$

D ( ) $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ E ( ) $a \cdot b = 24$

Questão 12. Se $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$, então o valor do $\det \begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p + x & 2q + y & 2r + z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$ é igual a

A ( ) 0 B ( ) 4 C ( ) 8 D ( ) 12 E ( ) 16

Questão 13. Seja p um polinômio com coeficientes reais, de grau 7, que admite $1 - i$ como raiz de multiplicidade 2. Sabe-se que a soma e o produto de todas as raízes de p são, respectivamente, 10 e -40. Sendo afirmado que três raízes de p são reais e distintas e formam uma progressão aritmética, então, tais raízes são

A ( ) $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{193}}{6}$, 3, $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{193}}{6}$ B ( ) $2 - 4\sqrt{13}$, 2, $2 + 4\sqrt{13}$

C ( ) -4, 2, 8 D ( ) -2, 3, 8 E ( ) -1, 2, 5

Questão 14. Sobre o polinômio $p(x) = x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2$ podemos afirmar que

A ( ) $x = 2$ não é raiz de p
B ( ) p só admite raízes reais, sendo uma delas inteira, duas racionais e duas irracionais
C ( ) p admite uma única raiz real, sendo ela uma raiz inteira
D ( ) p só admite raízes reais, sendo duas delas inteiras
E ( ) p admite somente 3 raízes reais, sendo uma delas inteira e duas irracionais

Questão 15. Seja o sistema linear nas incógnitas x e y, com a e b reais, dado por

$$\begin{cases} (a - b)x - (a + b)y = 1 \\ (a + b)x + (a - b)y = 1 \end{cases}$$

Considere as seguintes afirmações:

I. O sistema é possível e indeterminado se $a = b = 0$
II. O sistema é possível e determinado se a e b não são simultaneamente nulos
III. $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{a^2 + b^2}$, se $a^2 + b^2 \neq 0$

Então, pode-se afirmar que é(são) verdadeira(s) apenas

A ( ) I B ( ) II C ( ) III D ( ) I e II E ( ) II e III

Questão 16. Considere o polinômio $p(x) = x^3 - (a + 1)x + a$, onde $a \in \mathbb{Z}$. O conjunto de todos os valores de a, para os quais o polinômio $p(x)$ só admite raízes inteiras, é

A ( ) $\{2n; n \in \mathbb{N}\}$ B ( ) $\{4n^2; n \in \mathbb{N}\}$ C ( ) $\{6n^2 - 4n; n \in \mathbb{N}\}$
D ( ) $\{n(n + 1); n \in \mathbb{N}\}$ E ( ) $\mathbb{N}$

Questão 17. Numa circunferência C_1 de raio $r_1 = 3$ cm está inscrito um hexágono regular H_1; em H_1 está inscrita uma circunferência C_2; em C_2 está inscrito um hexágono regular H_2 e, assim, sucessivamente. Se A_n (em cm^2) é a área do hexágono H_n, então $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ (em cm^2) é igual a

A ( ) $54\sqrt{2}$ B ( ) $54\sqrt{3}$ C ( ) $36(1 + \sqrt{3})$
D ( ) $\dfrac{27}{2 - \sqrt{3}}$ E ( ) $30(2 + \sqrt{3})$

Questão 18. Sejam a reta $s : 12x - 5y + 7 = 0$ e a circunferência $C : x^2 + y^2 + 4x + 2y = 11$. A reta p, que é perpendicular a s e é secante a C, corta o eixo Oy num ponto cuja ordenada pertence ao seguinte intervalo

A ( ) $\left(-\dfrac{91}{12}, -\dfrac{81}{12}\right)$ B ( ) $\left(-\dfrac{81}{12}, -\dfrac{74}{12}\right)$ C ( ) $\left(-\dfrac{74}{12}, -\dfrac{30}{12}\right)$
D ( ) $\left(\dfrac{30}{12}, \dfrac{74}{12}\right)$ E ( ) $\left(\dfrac{75}{12}, \dfrac{91}{12}\right)$

Questão 19. Os focos de uma elipse são $F_1(0, -6)$ e $F_2(0, 6)$. Os pontos $A(0, 9)$ e $B(x, 3)$, $x > 0$, estão na elipse. A área do triângulo com vértices em B, F_1 e F_2 é igual a

A ( ) $22\sqrt{10}$ B ( ) $18\sqrt{10}$ C ( ) $15\sqrt{10}$ D ( ) $12\sqrt{10}$ E ( ) $6\sqrt{10}$

Questão 20. Uma pirâmide regular tem por base um hexágono cuja diagonal menor mede $3\sqrt{3}$ cm. As faces laterais desta pirâmide formam diedros de 60° com o plano da base: A área total da pirâmide, em cm^2, é

A ( ) $\dfrac{81\sqrt{3}}{2}$ B ( ) $\dfrac{81\sqrt{2}}{2}$ C ( ) $\dfrac{81}{2}$ D ( ) $27\sqrt{3}$ E ( ) $27\sqrt{2}$

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.

Questão 21. Considere A um conjunto não vazio com um número finito de elementos. Dizemos que $F = \{A_1, \ldots, A_m\} \subset P(A)$ é uma **partição de** A se as seguintes condições são satisfeitas:

I. $A_i \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, m$
II. $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$, para $i, j = 1, \ldots, m$
III. $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$

Dizemos ainda que F é uma partição **de ordem** k se $n(A_i) = k$, $i = 1, \ldots, m$.
Supondo que $n(A) = 8$, determine:

(a) As ordens possíveis para uma partição de A

(b) O número de partições de A que têm ordem 2

Questão 22. Seja $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 \le x < 1 \end{cases}$.

Seja $g : (-1/2, 1/2) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \begin{cases} f(x + 1/2), & -1/2 < x < 0 \\ 1 - f(x + 1/2), & 0 \le x < 1/2 \end{cases}$, com f definida acima. Justificando a resposta, determine se g é par, ímpar ou nem par nem ímpar.

Questão 23. Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^9$.

Questão 24. Determine para quais valores de $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ vale a desigualdade

$$\log_{\cos x}(4\,\mathrm{sen}^2 x - 1) - \log_{\cos x}(4 - \sec^2 x) > 2.$$

Questão 25. Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$, com raízes reais. O coeficiente a é racional e a diferença entre duas de suas raízes também é racional. Nestas condições, analise se a seguinte afirmação é verdadeira:

"Se uma das raízes de $p(x)$ é racional, então todas as suas raízes são racionais."

Questão 26. As medidas, em metros, do raio da base, da altura e da geratriz de um cone circular reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 2 metros. Calcule a área total deste cone em m^2.

Questão 27. Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1/2 & 5 \end{bmatrix}$$

Determine o elemento C_{34} da matriz $C = (A + B)^{-1}$.

Questão 28. Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ uma progressão geométrica infinita de razão positiva r, em que $a_1 = a$ é um número real não nulo. Sabendo que a soma de todos os termos de índices pares desta progressão geométrica é igual a 4 e que a soma de todos os termos de índices múltiplos de 3 é $16/13$, determine o valor de $a + r$.

Questão 29. Sabendo que $9y^2 - 16x^2 - 144y + 224x - 352 = 0$ é a equação de uma hipérbole, calcule sua distância focal.

Questão 30. Considere um losango $ABCD$ cujo perímetro mede 100 cm e cuja maior diagonal mede 40 cm. Calcule a área, em cm^2, do círculo inscrito neste losango.