ITA 2005
MATEMÁTICA

Vestibular

NOTAÇÕES

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos.	$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leq x \leq b\}$.
$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais.	$]a,b[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x < b\}$.
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais.	i : unidade imaginária ; $i^2 = -1$.
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros.	$z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.	$\bar{z}$: conjugado do número complexo $z \in \mathbb{C}$.
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.	$\lvert z\rvert$: módulo do número complexo $z \in \mathbb{C}$.
$\emptyset$: conjunto vazio.	$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B.
$A \setminus B = \{x \in A\,;\, x \notin B\}$.	$m(\overline{AB})$: medida (comprimento) de $\overline{AB}$.

Questão 1. Considere os conjuntos $S = \{0, 2, 4, 6\}$, $T = \{1, 3, 5\}$ e $U = \{0, 1\}$ e as afirmações:

I. $\{0\} \in S$ e $S \cap U \neq \emptyset$.
II. $\{2\} \subset S \setminus U$ e $S \cap T \cap U = \{0, 1\}$.
III. Existe uma função $f : S \to T$ injetiva.
IV. Nenhuma função $g : T \to S$ é sobrejetiva.

Então, é(são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. **B** ( ) apenas IV. **C** ( ) apenas I e IV.

D ( ) apenas II e III. **E** ( ) apenas III e IV.

Questão 2. Em uma mesa de uma lanchonete, o consumo de 3 sanduíches, 7 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 31,50. Em outra mesa, o consumo de 4 sanduíches, 10 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 42,00. Então, o consumo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta totaliza o valor de

A ( ) R$ 17,50. **B** ( ) R$ 16,50. **C** ( ) R$ 12,50.

D ( ) R$ 10,50. **E** ( ) R$ 9,50.

Questão 3. Uma circunferência passa pelos pontos $A = (0, 2)$, $B = (0, 8)$ e $C = (8, 8)$. Então, o centro da circunferência e o valor de seu raio, respectivamente, são

A ( ) $(0, 5)$ e 6. **B** ( ) $(5, 4)$ e 5. **C** ( ) $(4, 8)$ e 5,5.

D ( ) $(4, 5)$ e 5. **E** ( ) $(4, 6)$ e 5.

Questão 4. Sobre o número $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que

A ( ) $x \in]0, 2[$. **B** ( ) x é racional. **C** ( ) $\sqrt{2x}$ é irracional.

D ( ) x^2 é irracional. **E** ( ) $x \in]2, 3[$.

Questão 5. Considere o triângulo de vértices A, B e C, sendo D um ponto do lado $\overline{AB}$ e E um ponto do lado $\overline{AC}$. Se $m(\overline{AB}) = 8\,\text{cm}$, $m(\overline{AC}) = 10\,\text{cm}$, $m(\overline{AD}) = 4\,\text{cm}$ e $m(\overline{AE}) = 6\,\text{cm}$, a razão das áreas dos triângulos ADE e ABC é

A ( ) $\frac{1}{2}$. **B** ( ) $\frac{3}{5}$. **C** ( ) $\frac{3}{8}$. **D** ( ) $\frac{3}{10}$. **E** ( ) $\frac{3}{4}$.

Questão 6. Em um triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é a média geométrica das medidas dos catetos. Então, o valor do cosseno de um dos ângulos do triângulo é igual a

A ( ) $\frac{4}{5}$. **B** ( ) $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$. **C** ( ) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

D ( ) $\frac{1}{4}\sqrt{4+\sqrt{3}}$. **E** ( ) $\frac{1}{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Questão 7. A circunferência inscrita num triângulo equilátero com lados de 6 cm de comprimento é a interseção de uma esfera de raio igual a 4 cm com o plano do triângulo. Então, a distância do centro da esfera aos vértices do triângulo é (em cm)

A ( ) $3\sqrt{3}$. **B** ( ) 6. **C** ( ) 5. **D** ( ) 4. **E** ( ) $2\sqrt{5}$.

Questão 8. Uma esfera de raio r é seccionada por n planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semi-esfera formam uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi r^3}{45}$. Se o volume da menor cunha for igual a $\frac{\pi r^3}{18}$, então n é igual a

A ( ) 4. **B** ( ) 3. **C** ( ) 6. **D** ( ) 5. **E** ( ) 7.

Questão 9. Considere um prisma regular em que a soma dos ângulos internos de todas as faces é $7200°$. O número de vértices deste prisma é igual a

A ( ) 11. **B** ( ) 32. **C** ( ) 10. **D** ( ) 20. **E** ( ) 22.

Questão 10. Em relação a um sistema de eixos cartesiano ortogonal no plano, três vértices de um tetraedro regular são dados por $A = (0, 0)$, $B = (2, 2)$ e $C = (1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$. O volume do tetraedro é

A ( ) $\frac{8}{3}$. **B** ( ) 3. **C** ( ) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **D** ( ) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **E** ( ) 8.

Questão 11. No desenvolvimento de $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ obtém-se um polinômio $p(x)$ cujos coeficientes somam 32. Se 0 e -1 são raízes de $p(x)$, então a soma $a+b+c$ é igual a

A ( ) $-\frac{1}{2}$. **B** ( ) $-\frac{1}{4}$. **C** ( ) $\frac{1}{2}$. **D** ( ) 1. **E** ( ) $\frac{3}{2}$.

Questão 12. O menor inteiro positivo n para o qual a diferença $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ fica menor que $0,01$ é

A ( ) 2499. **B** ( ) 2501. **C** ( ) 2500. **D** ( ) 3600. **E** ( ) 4900.

Questão 13. Seja $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e $f : D \to D$ uma função dada por

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} .$$

Considere as afirmações:

I. f é injetiva e sobrejetiva.
II. f é injetiva, mas não sobrejetiva.
III. $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \quad$ para todo $x \in D,\ x \neq 0$.
IV. $f(x) \cdot f(-x) = 1,\ $ para todo $x \in D$.

Então, são verdadeiras

A ( ) apenas I e III. **B** ( ) apenas I e IV. **C** ( ) apenas II e III.

D ( ) apenas I, III e IV. **E** ( ) apenas II, III e IV.

Questão 14. O número complexo $2 + i$ é raiz do polinômio

$$f(x) = x^4 + x^3 + px^2 + x + q ,$$

com $p, q \in \mathbb{R}$. Então, a alternativa que mais se aproxima da soma das raízes reais de f é

A ( ) 4. **B** ( ) -4. **C** ( ) 6. **D** ( ) 5. **E** ( ) -5.

Questão 15. Considere a equação em x

$$a^{x+1} = b^{1/x} \quad ,$$

onde a e b são números reais positivos, tais que $\ln b = 2 \ln a > 0$. A soma das soluções da equação é

A ( ) 0. **B** ( ) -1. **C** ( ) 1. **D** ( ) $\ln 2$. **E** ( ) 2.

Questão 16. O intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que contém todas as soluções da inequação

$$\arctan \frac{1+x}{2} + \arctan \frac{1-x}{2} \geq \frac{\pi}{6}$$

é

A ( ) $[-1, 4]$. **B** ( ) $[-3, 1]$. **C** ( ) $[-2, 3]$. **D** ( ) $[0, 5]$. **E** ( ) $[4, 6]$.

Questão 17. Seja $z \in \mathbb{C}$ com $|z| = 1$. Então, a expressão $\left|\frac{1 - \overline{z}w}{z - w}\right|$ assume valor

A ( ) maior que 1 , para todo w com $|w| > 1$.
B ( ) menor que 1 , para todo w com $|w| < 1$.
C ( ) maior que 1 , para todo w com $w \neq z$.
D ( ) igual a 1 , independente de w com $w \neq z$.
E ( ) crescente para $|w|$ crescente, com $|w| < |z|$.

Questão 18. O sistema linear

$$\begin{cases} bx + y = 1 \\ by + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{cases}$$

não admite solução se e somente se o número real b for igual a

A ( ) -1. **B** ( ) 0. **C** ( ) 1. **D** ( ) 2. **E** ( ) -2.

Questão 19. Retiram-se 3 bolas de uma urna que contém 4 bolas verdes, 5 bolas azuis e 7 bolas brancas. Se P_1 é a probabilidade de não sair bola azul e P_2 é a probabilidade de todas as bolas sairem com a mesma cor, então a alternativa que mais se aproxima de $P_1 + P_2$ é

A ( ) $0,21$. **B** ( ) $0,25$. **C** ( ) $0,28$. **D** ( ) $0,35$. **E** ( ) $0,40$.

Questão 20. A distância focal e a excentricidade da elipse com centro na origem e que passa pelos pontos $(1,0)$ e $(0,-2)$ são, respectivamente,

A ( ) $\sqrt{3}$ e $\frac{1}{2}$. **B** ( ) $\frac{1}{2}$ e $\sqrt{3}$. **C** ( ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2}$. **D** ( ) $\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **E** ( ) $2\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.

Questão 21. Seja $a_1, a_2, \ldots$ uma progressão aritmética infinita tal que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = n\sqrt{2} + \pi n^2 , \quad \text{para } n \in \mathbb{N}^*.$$

Determine o primeiro termo e a razão da progressão.

Questão 22. Seja C a circunferência de centro na origem, passando pelo ponto $P = (3,4)$. Se t é a reta tangente a C por P, determine a circunferência C' de menor raio, com centro sobre o eixo x e tangente simultaneamente à reta t e à circunferência C.

Questão 23. Sejam A e B matrizes 2×2 tais que $AB = BA$ e que satisfazem à equação matricial $A^2 + 2AB - B = 0$. Se B é inversível, mostre que

(a) $AB^{-1} = B^{-1}A$ e que (b) A é inversível.

Questão 24. Seja n o número de lados de um polígono convexo. Se a soma de $n-1$ ângulos (internos) do polígono é $2004°$, determine o número n de lados do polígono.

Questão 25. (a) Mostre que o número real $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é raíz da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$.

(b) Conclua de (a) que α é um número racional.

Questão 26. Considere a equação em $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{1+mx} = x + \sqrt{1-mx} \quad ,$$

sendo m um parâmetro real.
(a) Resolva a equação em função do parâmetro m.
(b) Determine todos os valores de m para os quais a equação admite solução não nula.

Questão 27. Um dos catetos de um triângulo retângulo mede $\sqrt[3]{2}$ cm. O volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno da hipotenusa é π cm^3. Determine os ângulos deste triângulo.

Questão 28. São dados dois cartões, sendo que um deles tem ambos os lados na cor vermelha, enquanto o outro tem um lado na cor vermelha e o outro lado na cor azul. Um dos cartões é escolhido ao acaso e colocado sobre uma mesa. Se a cor exposta é vermelha, calcule a probabilidade de o cartão escolhido ter a outra cor também vermelha.

Questão 29. Obtenha todos os pares (x, y), com $x, y \in [0, 2\pi]$, tais que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) &= \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen} x + \cos y &= 1 \end{aligned}$$

Questão 30. Determine todos os valores reais de a para os quais a equação

$$(x-1)^2 = |x-a|$$

admita exatamente três soluções distintas.