ITA 2003
MATEMÁTICA

Vestibular

NOTAÇÕES

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos.
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais.
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
$\bar{z}$: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$.
i : unidade imaginária; $i^2 = -1$.
$\arg z$: um argumento de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$.
$]a, b[\ = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$.
$\emptyset$: conjunto vazio.
$A \setminus B = \{x \in A;\ x \notin B\}$.
$X^C = U \setminus X$, para $X \subset U$, $U \neq \emptyset$.
I : matriz identidade $n \times n$.
A^{-1} : inversa da matriz inversível A.
A^T : transposta da matriz A.
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B.
$m(\overline{AB})$: medida (comprimento) de $\overline{AB}$.

Questão 01. Seja $z \in \mathbb{C}$. Das seguintes afirmações independentes:

I. Se $\omega = \dfrac{2iz^2 + 5\bar{z} - i}{1 + 3\bar{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z|}$, então $\bar{\omega} = \dfrac{-2i\bar{z}^2 + 5z + i}{1 + 3z^2 - 2i\bar{z} + 3|\bar{z}|^2 + 2|z|}$.

II. Se $z \neq 0$ e $\omega = \dfrac{2iz + 3i + 3}{(1 + 2i)z}$, então $|\omega| \leq \dfrac{2|z| + 3\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,|z|}$.

III. Se $\omega = \dfrac{(1 + i)z^2}{4\sqrt{3} + 4i}$, então $2\arg z + \dfrac{\pi}{12}$ é um argumento de ω.

é (são) verdadeira(s):

A ( ) todas.
B ( ) apenas I e II.
C ( ) apenas II e III.
D ( ) apenas I e III.
E ( ) apenas II.

Questão 02. O valor de $y^2 - xz$ para o qual os números $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}$, x, y, z e $\operatorname{sen} 75^\circ$, nesta ordem, formam uma progressão aritmética, é:

A ( ) 3^{-4} B ( ) 2^{-6} C ( ) 6^{-2} D ( ) 2^{-5} E ( ) $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}$

Questão 03. Considere a função

$$f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{3^{x-2}}\left(9^{2x+1}\right)^{1/(2x)} - \left(3^{2x+5}\right)^{1/x} + 1.$$

A soma de todos os valores de x para os quais a equação $y^2 + 2y + f(x) = 0$ tem raiz dupla é:

A ( ) 0 B ( ) 1 C ( ) 2 D ( ) 4 E ( ) 6

Questão 04. Considere uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ não-constante e tal que

$$f(x+y)=f(x)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Das afirmações:

I. $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

II. $f(nx)=[f(x)]^n,\ \forall x\in\mathbb{R};\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

III. f é par.

é (são) verdadeira(s):

A ( ) apenas I e II.
B ( ) apenas II e III.
C ( ) apenas I e III.
D ( ) todas.
E ( ) nenhuma.

Questão 05. Considere o polinômio $P(x)=2x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, cujos coeficientes $2, a_2, \ldots, a_n$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q>0$. Sabendo que $-\frac{1}{2}$ é uma raiz de P e que $P(2)=5460$, tem-se que o valor de $\frac{n^2-q^3}{q^4}$ é igual a:

A ( ) $\frac{5}{4}$ B ( ) $\frac{3}{2}$ C ( ) $\frac{7}{4}$ D ( ) $\frac{11}{6}$ E ( ) $\frac{15}{8}$

Questão 06. Dividindo-se o polinômio $P(x)=x^5+ax^4+bx^2+cx+1$ por $(x-1)$, obtém-se resto igual a 2. Dividindo-se $P(x)$ por $(x+1)$, obtém-se resto igual a 3. Sabendo que $P(x)$ é divisível por $(x-2)$, tem-se que o valor de $\frac{ab}{c}$ é igual a:

A ( ) -6 B ( ) -4 C ( ) 4 D ( ) 7 E ( ) 9

Questão 07. Das afirmações abaixo sobre a equação $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ e suas soluções no plano complexo:

I. A equação possui pelo menos um par de raízes reais.

II. A equação possui duas raízes de módulo 1, uma raiz de módulo menor que 1 e uma raiz de módulo maior que 1.

III. Se $n\in\mathbb{N}^*$ e r é uma raiz qualquer desta equação, então $\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{r}{3}\right|^k<\frac{1}{2}$.

é (são) verdadeira(s):

A ( ) nenhuma.
B ( ) apenas I.
C ( ) apenas II.
D ( ) apenas III.
E ( ) apenas I e III.

Questão 08. Seja k 2 R tal que a equação $2x^3 + 7x^2 + 4x + k = 0$ possua uma raiz dupla e inteira x_1 e uma raiz x_2, distinta de x_1. Então, $(k + x_1)x_2$ é igual a:

A ( ) ¡6 B ( ) ¡3 C ( ) 1 D ( ) 2 E ( ) 8

Questão 09. Considere o conjunto S = f(a; b) 2 N £ N : a + b = 18g. A soma de todos os números da forma $\frac{18!}{a!\,b!}$, 8 (a; b) 2 S , é:

A ( ) 8^6 B ( ) 9! C ( ) 9^6 D ( ) 12^6 E ( ) 12!

Questão 10. O número de divisores (positivos) de 17 640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é:

A ( ) 24 B ( ) 36 C ( ) 48 D ( ) 54 E ( ) 72

Questão 11. Sejam A e P matrizes n £ n inversíveis e $B = P^{i1}AP$. Das a…rmações:

I. B^T é inversível e $\left(B^T\right)^{i1} = (B^{i1})^T$:

II. Se A é simétrica, então B também o é.

III. det(A ¡ ¸I) = det(B ¡ ¸I) ; 8 ¸ 2 R.

é (são) verdadeira(s):

A ( ) todas.
B ( ) apenas I.
C ( ) apenas I e II.
D ( ) apenas I e III.
E ( ) apenas II e III.

Questão 12. O número de todos os valores de a 2 [0; 2¼], distintos, para os quais o sistema nas incógnitas x; y e z, dado por

$$\begin{cases} ¡4x + y ¡ 6z = \cos 3a \\ x + 2y ¡ 5z = \operatorname{sen} 2a \\ 6x + 3y ¡ 4z = ¡2\cos a \,; \end{cases}$$

é possível e não-homogêneo, é igual a:

A ( ) 2 B ( ) 3 C ( ) 4 D ( ) 5 E ( ) 6

Questão 13. Para todo $x \in \mathbb{R}$, a expressão $[\cos(2x)]^2 [\operatorname{sen}(2x)]^2 \operatorname{sen} x$ é igual a:

A ( ) $2^{-4}[\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen}(7x)]$.
B ( ) $2^{-4}[2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(7x) - \operatorname{sen}(9x)]$.
C ( ) $2^{-4}[-\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(7x)]$.
D ( ) $2^{-4}[-\operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen}(5x) - \operatorname{sen}(9x)]$.
E ( ) $2^{-4}[\operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(5x)]$.

Questão 14. Considere os contradomínios das funções arco-seno e arco-cosseno como sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $[0, \pi]$, respectivamente. Com respeito à função

$$f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad f(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x,$$

temos que:

A ( ) f é não-crescente e ímpar.
B ( ) f não é par nem ímpar.
C ( ) f é sobrejetora.
D ( ) f é injetora.
E ( ) f é constante.

Questão 15. Considere a família de circunferências com centros no segundo quadrante e tangentes ao eixo Oy. Cada uma destas circunferências corta o eixo Ox em dois pontos, distantes entre si de 4 cm. Então, o lugar geométrico dos centros destas circunferências é parte:

A ( ) de uma elipse.
B ( ) de uma parábola.
C ( ) de uma hipérbole.
D ( ) de duas retas concorrentes.
E ( ) da reta $y = -x$.

Questão 16. A área do polígono, situado no primeiro quadrante, que é delimitado pelos eixos coordenados e pelo conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0\},$$

é igual a:

A ( ) $\sqrt{6}$ B ( ) $\frac{5}{2}$ C ( ) $2\sqrt{2}$ D ( ) 3 E ( ) $\frac{10}{3}$

Questão 17. Sejam r e s duas retas paralelas distando entre si 5 cm. Seja P um ponto na região interior a estas retas, distando 4 cm de r. A área do triângulo equilátero PQR, cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas r e s, é igual, em cm^2, a:

A ( ) $3\sqrt{15}$ B ( ) $7\sqrt{3}$ C ( ) $5\sqrt{6}$ D ( ) $\frac{15}{2}\sqrt{3}$ E ( ) $\frac{7}{2}\sqrt{15}$

Questão 18. Considere três polígonos regulares tais que os números que expressam a quantidade de lados de cada um constituam uma progressão aritmética. Sabe-se que o produto destes três números é igual a 585 e que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a $3\,780^\circ$. O número total das diagonais nestes três polígonos é igual a:

A ( ) 63 B ( ) 69 C ( ) 90 D ( ) 97 E ( ) 106

Questão 19. Considere o triângulo isósceles OAB, com lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ de comprimento $\sqrt{2}R$ e lado $\overline{AB}$ de comprimento $2R$. O volume do sólido, obtido pela rotação deste triângulo em torno da reta que passa por O e é paralela ao lado $\overline{AB}$, é igual a:

A ( ) $\frac{\pi}{2}R^3$ B ( ) πR^3 C ( ) $\frac{4\pi}{3}R^3$ D ( ) $\sqrt{2}\,\pi R^3$ E ( ) $\sqrt{3}\,\pi R^3$

Questão 20. Considere uma pirâmide regular de altura igual a 5 cm e cuja base é formada por um quadrado de área igual a 8 cm^2. A distância de cada face desta pirâmide ao centro de sua base, em cm, é igual a:

A ( ) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ B ( ) $\frac{5\sqrt{6}}{9}$ C ( ) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$ D ( ) $\frac{7}{5}$ E ( ) $\sqrt{3}$

AS QUESTÕES DE 21 A 30 DEVERÃO SER RESOLVIDAS
NO CADERNO DE RESPOSTAS ANEXO.

Questão 21. Sejam U um conjunto não-vazio e $A \subset U$, $B \subset U$. Usando apenas as definições de igualdade, reunião, intersecção e complementar, prove que:

I. Se $A \cap B = \emptyset$, então $B \subset A^C$.

II. $B - A^C = B \cap A$.

Questão 22. Determine o conjunto dos números complexos z para os quais o número

$$\omega = \frac{z + \bar{z} + 2}{\sqrt{|z-1| + |z+1| - 3}}$$

pertence ao conjunto dos números reais. Interprete (ou identifique) este conjunto geometricamente e faça um esboço do mesmo.

Questão 23. Considere a seguinte situação baseada num dos paradoxos de Zenão de Eléia, filósofo grego do século V A.C. Suponha que o atleta Aquiles e uma tartaruga apostam uma corrida em linha reta, correndo com velocidades constantes v_A e v_T, com $0 < v_T < v_A$. Como a tartaruga é mais lenta, é-lhe dada uma vantagem inicial, de modo a começar a corrida no instante $t = 0$ a uma distância $d_1 > 0$ na frente de Aquiles. Calcule os tempos $t_1, t_2, t_3, \ldots$ que Aquiles precisa para percorrer as distâncias $d_1, d_2, d_3, \ldots$, respectivamente, sendo que, para todo $n \geq 2$, d_n denota a distância entre a tartaruga e Aquiles no instante $\sum_{k=1}^{n-1} t_k$ da corrida. Verifique que os termos t_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, formam uma progressão geométrica infinita, determine sua soma e dê o significado desta soma.

Questão 24. Mostre que toda função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, satisfazendo $f(xy) = f(x) + f(y)$ em todo seu domínio, é par.

Questão 25. Sejam a, b, c e d constantes reais. Sabendo que a divisão de $P_1(x) = x^4 + ax^2 + b$ por $P_2(x) = x^2 + 2x + 4$ é exata, e que a divisão de $P_3(x) = x^3 + cx^2 + dx - 3$ por $P_4(x) = x^2 - x + 2$ tem resto igual a -5, determine o valor de $a + b + c + d$.

Questão 26. Sejam a, b, c e d números reais não-nulos. Exprima o valor do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{bmatrix}$$

na forma de um produto de números reais.

Questão 27. Encontre todos os valores de $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ para os quais a equação na variável real x,

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} - 1 + \frac{e^x}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} - 1 - \frac{e^x}{2}\right) = a,$$

admite solução.

Questão 28. Sabe-se que uma elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ tangencia internamente a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 5$ e que a reta de equação $3x + 2y = 6$ é tangente à elipse no ponto P. Determine as coordenadas de P.

Questão 29. Considere um quadrado $ABCD$. Sejam E o ponto médio do segmento $\overline{CD}$ e F um ponto sobre o segmento $\overline{CE}$ tal que $m\left(\overline{BC}\right) + m\left(\overline{CF}\right) = m\left(\overline{AF}\right)$. Prove que $\cos\alpha = \cos 2\beta$, sendo os ângulos $\alpha = B\hat{A}F$ e $\beta = E\hat{A}D$.

Questão 30. Quatro esferas de mesmo raio $R > 0$ são tangentes externamente duas a duas, de forma que seus centros formam um tetraedro regular com arestas de comprimento $2R$. Determine, em função de R, a expressão do volume do tetraedro circunscrito às quatro esferas.