

PRINCIPAIS NOTAÇÕES

\mathbb{R} = conjunto dos números reais;

$\log_a b$ = logaritmo de **b** na base **a**;

\mathbb{N} = conjunto dos inteiros positivos;

\bar{z} = complexo conjugado de z ;

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$;

i = unidade imaginária ($i = \sqrt{-1}$);

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$;

$\det A$ = determinante da matriz A ;

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$;

A^t = transposta da matriz A ;

(a, b) é o par ordenado ou o intervalo aberto, conforme o contexto;

$\binom{n}{r}$ = combinação de n elementos tomados r a r .

1. Seja $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n!} + \operatorname{sen}\left(\frac{n! \pi}{6}\right); n \in \mathbb{N} \right\}$.

Qual conjunto abaixo é tal que sua intersecção com **A** dá o próprio **A**?

(A) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

(B) $(-\infty, -2]$

(C) $[-2, 2]$

(D) $[-2, 0]$

(E) $[0, 2)$

2. Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{se } x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{a}{x} \operatorname{sen} x & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

onde $a > 0$ é uma constante. Considere $K = \{y \in \mathbb{R}; f(y) = 0\}$. Qual o valor de **a**, sabendo-se que

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \in K$?

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) $\frac{\pi^2}{2}$ (E) π^2

3. Uma vez que, para todo $x \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, vale a desigualdade $x^n > n(x - 1)$, temos como consequência que, para $0 < x < 1$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

- (A) $x^{n-1} < [n(1 + x)]^{-1}$
- (B) $x^{n-1} < [(n + 1)(1 + x)]^{-1}$
- (C) $x^{n-1} < [n^2(1 - x)]^{-1}$
- (D) $x^{n-1} < [(n + 1)(1 - x)]^{-1}$
- (E) $x^{n-1} < [n(1 - x)]^{-1}$

4. Considere todos os números de cinco algarismos formados pela justaposição de 1, 3, 5, 7 e 9 em qualquer ordem, sem repetição. A soma de todos esses números está entre:

- (A) 5×10^6 e 6×10^6
- (B) 6×10^6 e 7×10^6
- (C) 7×10^6 e 8×10^6
- (D) 9×10^6 e 10×10^6
- (E) 10×10^6 e 11×10^6

5. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que:

$$1 - \binom{4n}{2} + \binom{4n}{4} - \dots - \binom{4n}{4n-2} + 1$$

é igual a:

- (A) $(-1)^n \cdot 2^{2n}$
- (B) 2^{2n}
- (C) $(-1)^n \cdot 2^n$
- (D) $(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n}$
- (E) $(-1)^{n+1} \cdot 2^n$

6. Se a soma dos termos da progressão geométrica dada por 0,3: 0,03: 0,003: ... é igual ao termo médio de uma progressão aritmética de três termos, então a soma dos termos da progressão aritmética vale:

- (A) $1/3$
- (B) $2/3$
- (C) 1
- (D) 2
- (E) $1/2$

7. Os dados experimentais da tabela abaixo correspondem às concentrações de uma substância química medida em intervalos de 1 segundo. Assumindo que a linha que passa pelos três pontos experimentais é uma parábola, tem-se que a concentração (em moles) após 2,5 segundos é:

Tempo (s)	Concentração (moles)
1	3,00
2	5,00
3	1,00

- (A) 3,60
- (B) 3,65
- (C) 3,70
- (D) 3,75
- (E) 3,80

8. A divisão de um polinômio $P(x)$ por $x^2 - x$ resulta no quociente $6x^2 + 5x + 3$ e resto $-7x$. O resto da divisão de $P(x)$ por $2x + 1$ é igual a:

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

9. Sabendo-se que $4 + i\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ são raízes do polinômio $2x^5 - 22x^4 + 74x^3 + 2x^2 - 420x + 540$, então a soma dos quadrados de todas as raízes reais é:

- (A) 17
- (B) 19
- (C) 21
- (D) 23
- (E) 25

10. Seja z um número complexo satisfazendo $\operatorname{Re}(z) > 0$ e $(z + i)^2 + |\bar{z} + i|^2 = 6$, onde \bar{z} é o conjugado de z . Se n é o menor natural para o qual z^n é um imaginário puro, então n é igual a:

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

11. Sejam z_1 e z_2 números complexos com $|z_1| = |z_2| = 4$. Se 1 é uma raiz da equação $z_1 z^6 + z_2 z^3 - 8 = 0$ então a soma das raízes reais é igual a:

- (A) -1
- (B) $-1 + 2^{1/2}$
- (C) $1 - 2^{1/3}$
- (D) $1 + 3^{1/2}$
- (E) $-1 + 3^{1/2}$

12. Se S é o conjunto dos valores de a para os quais o sistema

$$x + y + z = 0$$

$$x + (\log_3 a)^2 y + z = 0$$

$$2x + 2y + \left(\log_3 \frac{27}{a}\right)z = 0$$

é indeterminado, então:

- (A) $S \subset [-3, 3]$
- (B) S é vazio
- (C) $S \subset [2, 4]$
- (D) $S \subset [1, 3]$
- (E) $S \subset [0, 1]$

13. Se x é um número real positivo, com $x \neq 1$ e $x \neq \frac{1}{3}$, satisfazendo:

$$\frac{2 + \log_3 x}{\log_{x+2} x} - \frac{\log_x (x + 2)}{1 + \log_3 x} = \log_x (x + 2)$$

então x pertence ao intervalo I , onde:

- (A) $I = \left(0, \frac{1}{9}\right)$
- (B) $I = \left(0, \frac{1}{3}\right)$
- (C) $I = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$
- (D) $I = \left(1, \frac{3}{2}\right)$
- (E) $I = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$

14. Dizemos que duas matrizes $n \times n$ **A** e **B** são semelhantes se existe uma matriz $n \times n$ inversível **P** tal que $B = P^{-1}AP$. Se **A** e **B** são matrizes semelhantes quaisquer, então:

- (A) B é sempre inversível.
- (B) se A é simétrica, então B também é simétrica.
- (C) B^2 é semelhante a A.
- (D) se C é semelhante a A, então BC é semelhante a A^2 .
- (E) $\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - A)$, onde λ é um real qualquer.

15. Sejam **A** e **B** matrizes reais 3×3 . Se $\text{tr}(A)$ denota a soma dos elementos da diagonal principal de **A**, considere as afirmações:

[(I)] $\text{tr}(A^t) = \text{tr}(A)$

[(II)] Se A é inversível, então $\text{tr}(A) \neq 0$.

[(III)] $\text{tr}(A + \lambda B) = \text{tr}(A) + \lambda \text{tr}(B)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Temos que:

- (A) todas as afirmações são verdadeiras.
- (B) todas as afirmações são falsas.
- (C) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- (D) apenas a afirmação (II) é falsa.
- (E) apenas a afirmação (III) é falsa.

16. Três pontos de coordenadas, respectivamente, $(0, 0)$, $(b, 2b)$ e $(5b, 0)$, com $b > 0$, são vértices de um retângulo. As coordenadas do quarto vértice são dadas por:

- (A) $(-b, -b)$
- (B) $(2b, -b)$
- (C) $(4b, -2b)$
- (D) $(3b, -2b)$
- (E) $(2b, -2b)$

17. Uma reta **t** do plano cartesiano **xOy** tem coeficiente angular $2a$ e tangencia a parábola $y = x^2 - 1$ no ponto de coordenadas (a, b) . Se $(c, 0)$ e $(0, d)$ são as coordenadas de dois pontos de **t** tais que $c > 0$ e $c = -2d$, então a/b é igual a:

- (A) $-4/15$
- (B) $-5/16$
- (C) $-3/16$
- (D) $-6/15$
- (E) $-7/15$

18. Considere **C** uma circunferência centrada em **O** e raio $2r$, e **t** a reta tangente a **C** num ponto **T**. Considere também **A** um ponto de **C** tal que o ângulo $\widehat{AOT} = \theta$ é um ângulo agudo. Sendo **B** o ponto de **t** tal que o segmento \overline{AB} é paralelo ao segmento \overline{OT} , então a área do trapézio **OABT** é igual a

- (A) $r^2 (2\cos\theta - \cos 2\theta)$
- (B) $2r^2 (4\cos\theta - \sin 2\theta)$
- (C) $r^2 (4\sin\theta - \sin 2\theta)$
- (D) $r^2 (2\sin\theta + \cos\theta)$
- (E) $2r^2 (2\sin 2\theta - \cos 2\theta)$

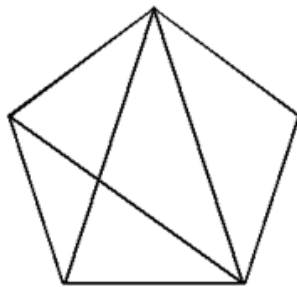
19. A expressão $\frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$, $0 < \theta < \pi$, é idêntica a:

- (A) $\sec\frac{\theta}{2}$
- (B) $\operatorname{cosec}\frac{\theta}{2}$
- (C) $\cotg\frac{\theta}{2}$
- (D) $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$
- (E) $\cos\frac{\theta}{2}$

20. Um dispositivo colocado no solo a uma distância d de uma torre dispara dois projéteis em trajetórias retilíneas. O primeiro, lançado sob um ângulo $\theta \in (0, \pi/4)$, atinge a torre a uma altura **h**. Se o segundo, disparado sob um ângulo 2θ , atinge-a a uma altura **H**, a relação entre as duas alturas será:

- (A) $H = \frac{2hd^2}{d^2 - h^2}$
- (B) $H = \frac{2hd^2}{d^2 + h}$
- (C) $H = \frac{2hd^2}{d^2 - h}$
- (D) $H = \frac{2hd^2}{d^2 + h^2}$
- (E) $H = \frac{hd^2}{d^2 + h}$

21. O comprimento da diagonal de um pentágono regular de lado medindo 1 unidade é igual à raiz positiva de:



- (A) $x^2 + x - 2 = 0$
 (B) $x^2 - x - 2 = 0$
 (C) $x^2 - 2x + 1 = 0$
 (D) $x^2 + x - 1 = 0$
 (E) $x^2 - x - 1 = 0$

22. Um cone circular reto tem altura 12 cm e raio da base 5 cm. O raio da esfera inscrita neste cone mede, em cm:

- (A) $10/3$
 (B) $7/4$
 (C) $12/5$
 (D) 3
 (E) 2

23. O raio de um cilindro de revolução mede 1,5 m. Sabe-se que a área da base do cilindro coincide com a área da secção determinada por um plano que contém o eixo do cilindro. Então, a área total do cilindro, em m^2 , vale:

- (A) $\frac{3\pi^2}{4}$
 (B) $\frac{9\pi(2+\pi)}{4}$
 (C) $\pi(2+\pi)$
 (D) $\frac{\pi^2}{2}$
 (E) $\frac{3\pi(\pi+1)}{2}$

24. Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume deste prisma, em cm^3 , é:

- (A) $27\sqrt{3}$ (B) $13\sqrt{2}$ (C) 12 (D) $54\sqrt{3}$ (E) $17\sqrt{5}$

25. Dada uma pirâmide regular triangular, sabe-se que sua altura mede $3a$ cm, onde "a" é a medida da aresta de sua base. Então, a área total desta pirâmide, em cm^2 , vale:

(A) $\frac{(a^2 \sqrt{327})}{4}$

(B) $\frac{(a^2 \sqrt{109})}{2}$

(C) $\frac{(a^2 \sqrt{3})}{2}$

(D) $\frac{[a^2 \sqrt{3} (2 + \sqrt{33})]}{2}$

(E) $\frac{[a^2 \sqrt{3} (1 + \sqrt{109})]}{4}$

Gabarito

- | | |
|-------|-------|
| 1. C | 14. E |
| 2. D | 15. D |
| 3. E | 16. C |
| 4. B | 17. A |
| 5. A | 18. C |
| 6. C | 19. D |
| 7. D | 20. A |
| 8. E | 21. E |
| 9. B | 22. A |
| 10. B | 23. B |
| 11. C | 24. D |
| 12. A | 25. E |
| 13. B | |