MINISTÉRIO DA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE PESQUISAS E DESENVOLVIMENTO
CENTRO TÉCNICO AEROESPACIAL
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

CONCURSO DE ADMISSÃO - 1975

EXAME DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. A duração da prova é de 3 horas e 30 minutos.
2. A prova de Matemática consta de 25 questões de Múltipla Escôlha.
3. Só há uma resposta certa em cada questão.
4. NÃO DEIXE DE RESPONDER NENHUMA QUESTÃO. QUANDO EM DÚVIDA, ASSINALE A RESPOSTA QUE LHE PARECER MAIS CÔRRETA.
5. Questões não respondidas ocasionam rejeição do cartão pelo computador, podendo prejudicar o candidato.
6. Assinale com um traço curto e forte de lápis o espaço correspondente a cada questão, na folha de respostas.
7. Verificando algum engano nas respostas poderá corrigí-la usando borracha.
8. Observe cuidadosamente o número das questões ao respondê-las.
9. A^t significa "a matriz transposta de A".
10. $\bar{Z}$ significa "o conjugado de Z".
11. $C_{n,r} = \binom{n}{r}$ é o número de combinações simples de n elementos tomados r a r.
12. R é o conjunto dos números reais.
13. e é a base dos logaritmos neperianos.
14. O agente fiscal fornecerá papel para rascunho; o qual não será considerado na correção da prova.
15. Não será permitido o uso de tabelas, régua de cálculo, máquina de calcular, apontamentos, formulários e outros papéis a não ser os fornecidos pelo fiscal.
16. O caderno de questões contém 4 páginas numeradas de 1 a 4 .
17. NDA significa "nenhuma das respostas anteriores".
18. Lidas as presentes instruções e preenchido o cabeçalho da folha de respostas aguarde ordem do fiscal para iniciar o exame.

QUESTÕES DE MATEMÁTICA

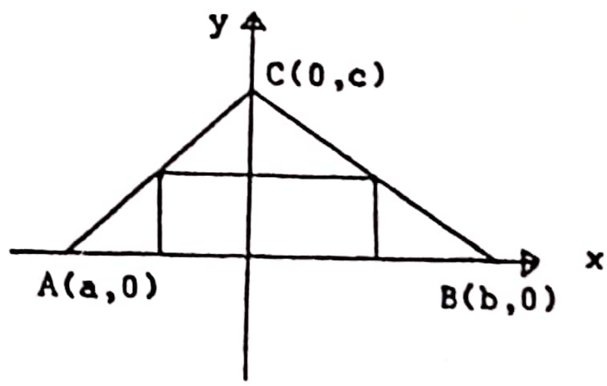
1. Qual é o valor de $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2$?

A) $\binom{n}{n}$ B) $\binom{2n}{n}$ C) $\binom{n^2}{n}$ D) 2^n E) NDA

2. Seja $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ definida em R. Se g fôr a função inversa de f, o valor de $e^{g(\frac{7}{25})}$ será:

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{7e}{25}$ C) $\log_e(\frac{25}{7})$ D) $e^{(\frac{7}{25})^2}$ E) NDA

3. Uma equação do lugar geométrico das intersecções das diagonais dos retângulos inscritos no triângulo ABC e com um lado em AB (figura abaixo) é:



A) $x + \frac{2(a+b)}{c} y = a + b$

B) $x + \frac{a+b}{c} y = \frac{a+b}{2}$

C) $ax + 3(b+c)y = \frac{a+c}{2}$

D) $x + c\,y + ab = 0$

E) NDA

4. A expressão $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \ldots.$ vale

A) 4 B) $\frac{9}{2}$ C) $\frac{7}{2}$ D) 3,8 E) NDA

5. Se dividirmos um polinômio P(x) por x - 2 o resto é 13 e se dividirmos P(x) por (x + 2) o resto é 5.
Supondo que R(x) é o resto da divisão de P(x) por $x^2 - 4$, podemos afirmar que o valor de R(x), para x = 1 é :

A) zero B) 7 C) 9 D) 11 E) NDA

6. Seja A uma matriz quadrada de ordem n, tal que $A^{-1} = A^t$.
Se det A = 1, dizemos que A é uma matriz de rotação e se det A = -1
A é uma matriz de reflexão.
Apoiados em tais definições, podemos afirmar que :

A) se n é impar, o produto de duas matrizes de reflexão é de reflexão ;

B) a soma de duas matrizes de rotação é de rotação ;

C) o produto de duas matrizes de rotação é de rotação ;

D) a matriz inversa de toda matriz de rotação é de reflexão ;

E) NDA

7. Sabendo-se que $\text{sen}x = \frac{m - n}{m + n}$, $n > 0$ e $m > 0$, podemos afirmar que $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ é igual a

A) $\frac{n}{m}$ B) $\frac{\sqrt{m}}{n}$ C) $1 - \frac{n}{m}$ D) $\sqrt{\frac{n}{m}}$ E) NDA

8. A respeito da equação

$(x^2 + 3x + 2)^2 - 8(x^2 + 2x) - 8x = 4$; podemos afirmar que

A) todas as raizes são inteiras

B) uma raiz é nula e as outras são positivas

C) a soma dos módulos das raizes é 6

D) o módulo da maior raiz é 5

E) NDA

9. Se Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 e Z_5 são as raizes da equação $(Z + 1)^5 + Z^5 = 0$, e se $R(Z)$ indica a parte real de Z então podemos afirmar que :

A) $R(Z_k) = 0$ para $K = 1,2,3$ e $R(Z_i) = 1$, para $i = 4,5$

B) $R(Z_k) = -\frac{1}{2}$ para $K = 1,2,3,4,5$

C) Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 são números reais (não complexos)

D) $R(Z_k) = 2$ para $K = 1,2,3$ e $R(Z_i) = 0$, para $i = 4,5$

E) NDA

10. Os lados de dois octógonos regulares têm, respectivamente, 5cm e 12 cm. O comprimento do lado de um terceiro octógono regular, de área igual à soma das áreas dos outros dois, é :

A) 17 cm B) 15 cm C) 14 cm D) 13 cm E) NDA

11. Admitindo-se que o polinômio

$$P(y) = y^5 - (tgu)^2\ y^3 + (tgu)\ y + sec^2 u - tg^2 u$$

é divisível pelo polinômio

$Q(y) = y + cotg^2 u - cosec^2 u$, onde $\frac{\pi}{2} < u < \pi$, podemos assegurar que :

A) tgu é um número irracional negativo ;

B) cossecu = - secu ;

C) $u = \frac{2\pi}{3}$;

D) tgu é um número tal que $-1 < tgu < 0$;

E) NDA

12. Se Z_1 e Z_2 são números complexos, $Z_1 + Z_2$ e $Z_1 . Z_2$ são ambos reais, então podemos afirmar que

A) Z_1 e Z_2 são ambos reais ou $Z_1 = \overline{Z_2}$;

B) Z_1 e Z_2 são números complexos não reais ;

C) Z_1 e Z_2 são números reais irracionais ;

D) Z_1 é número complexo puro e Z_2 é número real ;

E) NDA

13. Consideremos uma esfera de raio r = 1cm e um ponto P fora desta esfera. Sabemos que a distância deste ponto P à superfície da esfera mede 2cm. Qual é a razão K entre a área da superfície da esfera e a da calota visível do ponto P ?

A) K = 1 B) K = 2 C) K = 3 D) $K = \frac{5}{2}$ E) NDA

14. Seja S o conjunto das soluções do sistema de desigualdades :

$$2x + y - 3 > 0$$

$$x - 2y + 1 < 0$$

$$y - 3 < 0$$

$$x + my - 5 < 0 \text{ , onde } m \text{ é real .}$$

A representação geométrica de S, em coordenadas cartesianas ortogonais (x,y), é :

A) um quadrilátero para qualquer $m \geq 0$

B) um triângulo isósceles para qualquer $m < 0$

C) um triângulo retângulo para $m < 0$ ou $\frac{5}{3} < m < 4$

D) S é o conjunto vazio para $m > \frac{5}{3}$

E) NDA

15. Sendo a,b,c,d as raizes da equação

$2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$, podemos afirmar que :

A) a,b,c,d são reais positivas ;

B) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ é igual a $\frac{13}{5}$;

C) a,b,c,d não são reais ;

D) $\frac{1}{bcd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{abd} + \frac{1}{abc}$ é a soma das raizes ;

E) NDA

16. As medidas dos catetos de um triângulo retângulo são (sen x)cm e (cos x)cm. Um estudante calculou o volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno da hipotenusa, e obteve como resultado π cm^3 .
Considerando este resultado como certo, podemos afirmar que :

A) $x = \frac{\pi}{6}$ B) $x = \frac{\pi}{3}$ C) $x = \frac{\pi}{4}$ D) $x = \frac{\pi}{5}$ E) NDA

17. Sejam as matrizes reais $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

e m um número real. Seja: $AX = mX$.
Então podemos afirmar que:

A) se $\det(A - mI) \neq 0$, então $x + y = 0$ e $x.y \neq 0$.

B) se $\det(A - mI) = 0$, então existem dois números reais x,y tais que $x + y \neq 0$ ou $x.y \neq 0$.

C) se $\det(A - mI) = 0$, então $\det A = 0$ e $m = 0$.

D) se $\det A = 0$, então não existem dois números reais x,y, tais que $AX = mX$.

E) NDA

18. As dimensões de um paralelepípedo retângulo são proporcionais aos números $\log_e t$, $\log_e t^2$ e $\log_e t^3$ e a área total é 792 cm^2. Sabendo-se que a soma das dimensões vale 12 vezes a razão de proporcionalida - de, quais são os valores destas dimensões ?

A) 6; 12 e 18 B) 5; 10 e 15 C) 2; 3 e 4 D) 2; 4 e 8 ;

E) NDA

19) O número de soluções inteiras e não negativas da equação :

$$x + y + z + t = 7 \quad \text{é}:$$

A) $\binom{7}{4}$ B) $\binom{11}{4}$ C) $\binom{10}{3}$ D) $\binom{11}{3}$ E) NDA

20. Seja ABCD um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência. Sabe-se que $\hat{A} = 2\hat{C}$, $\hat{B} > \hat{D}$ e $\operatorname{tg}\hat{B} \cdot \operatorname{tg}\hat{D} + \operatorname{sen}\hat{A} \cdot \operatorname{sen}\hat{C} = -\frac{9}{4}$.
Neste caso, os valores de $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ são, respectivamente,

A) 150°, 45°, 75°, 30° ; B) 90°, 120°, 45°, 60° ;

C) 120°, 150°, 60°, 30° ; D) 120°, 120°, 60°, 60° ;

E) NDA

21. Num triângulo escaleno ABC, os lados opostos aos ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, medem respectivamente a, b, c . Então a expressão: $a \operatorname{sen}(\hat{B} - \hat{C}) + b \operatorname{sen}(\hat{C} - \hat{A}) + c \operatorname{sen}(\hat{A} - \hat{B})$ tem um valor que satisfaz uma das seguintes alternativas .

A) $a \operatorname{sen} \hat{A} + b \operatorname{sen} \hat{B} + c \operatorname{sen} \hat{C}$; B) $\operatorname{sen}^2 \hat{A} + \operatorname{sen}^2 \hat{B} + \operatorname{sen}^2 \hat{C}$;

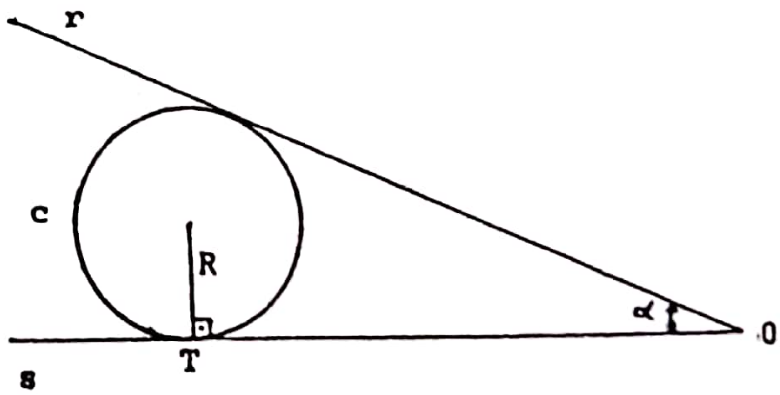
C) 0 ; D) 1 ; E) NDA

22. Considere a circunferência C que passa pelos pontos (0,0), (2,0) e (0,2) em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Uma das retas tangentes a esta circunferência, que passa pelo ponto (3,5), tem por equação

A) $x + y - 3 = 0$; B) $7x - y + 8 = 0$; C) $x - y + 2 = 0$;

D) $6x - y - 16 = 0$; E) NDA

23. Se, na figura abaixo, c é uma circunferência de raio R, r e s são retas tangentes à circunferência e $\overline{OT} = 2R$ então o ângulo α das retas r e s deve verificar uma das alternativas seguintes :



A) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$ e $\cos \alpha = \frac{3}{5}$;

B) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ e $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$;

C) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos \alpha = \frac{1}{2}$;

D) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$;

E) NDA

24. A respeito da equação exponencial $4^x + 6^x = 9^x$ podemos afirmar que:

A) $x = 9 \log_{10} \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)$ é uma raiz

B) $x = \left[\log_{10} \left(\frac{3}{2}\right)\right]^{-1} \cdot \log_{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$ é uma raiz

C) $x = \left[\log_{10} \left(\frac{3}{2}\right)\right]^{-1} \cdot \log_{10} \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)$ é uma raiz

D) $x = \left[\log_{10} \left(\frac{3}{2}\right)\right]^{-1} \cdot \log_{10} \left(\frac{1 + \sqrt{6}}{2}\right)$ é uma raiz

E) NDA

25. Seja $S = \log_3 (\text{tg } x_1) + \log_3 (\text{tg } x_2) + \log_3 (\text{tg } x_3) + \ldots$

onde $x_1 = \frac{\pi}{3}$ e $x_{n+1} = \text{arc tg } (\sqrt{\text{tg } x_n})$, $n = 2, 3, \ldots$

Nestas condições, podemos assegurar que :

A) $S = \log_3 (\text{tg}x_1 + \text{tg}x_2 + \text{tg}x_3 + \ldots)$

B) $S = -1$

C) $S = 2$

D) $S = 1$

E) NDA

ITA – MAT – 1975

BOTELHO

① $\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r}^2 = ?$

$$\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r}^2 = \binom{m}{0}^2 + \binom{m}{1}^2 + \ldots + \binom{m}{m}^2$$

ANTES VAMOS DEMONSTRAR A IDENTIDADE OU RELAÇÃO DE EULER

$$\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r}\binom{m}{p-r} = \binom{m+m}{p}$$

1º MÉTODO

$$(1+x)^{m+m} = (1+x)^{m} \cdot (1+x)^{m}$$

$$T_{p+1} = \binom{m+m}{p} 1^{m+m-p} x^{p} = \underbrace{\binom{m+m}{p}} x^{p}$$

OS TERMOS QUE CONTRIBUEM PARA x^p SÃO

$$\binom{m}{0} 1^{m-0} x^{0} \cdot \binom{m}{p} 1^{m-p} x^{p} \rightarrow \binom{m}{0}\binom{m}{p}$$

$$\binom{m}{1} 1^{m-1} x^{1} \cdot \binom{m}{p-1} 1^{m-p+1} x^{p-1} \rightarrow \binom{m}{1}\binom{m}{p-1}$$

$$\vdots$$

$$\binom{m}{p} 1^{m-p} x^{p} \cdot \binom{m}{0} 1^{m-0} x^{0} \rightarrow \binom{m}{p}\binom{m}{0}$$

$$\binom{m+m}{p} = \binom{m}{0}\binom{m}{p} + \binom{m}{1}\binom{m}{p-1} + \ldots + \binom{m}{p}\binom{m}{0}$$

2º MÉTODO

SELECIONAR p PESSOAS ENTRE m MULHERES E m HOMENS

TOTAL $\rightarrow \binom{m+m}{p}$

$\varnothing$ MULHERES $\rightarrow \binom{m}{0}\binom{m}{p}$

1 MULHER $\rightarrow \binom{m}{1}\binom{m}{p-1}$

$\vdots$

p MULHERES $\rightarrow \binom{m}{p}\binom{m}{0}$

$+$

NA IDENTIDADE OU RELAÇÃO DE EULER, FAZER $m=m$ E $p=m$

$$\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r}\underbrace{\binom{m}{m-r}}_{=\binom{m}{r}} = \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\binom{m}{r} =$$

$$= \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}^2 = \binom{m+m}{m} = \binom{2m}{m}$$

B

② $y = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \leftarrow f(x)$

INVERSA $x = \dfrac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}} = \dfrac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$

$$x \cdot e^{2y} + x = e^{2y} - 1 \quad \therefore \quad x + 1 = (1-x)e^{2y}$$

$$e^{2y} = \frac{x+1}{1-x} \quad \therefore \quad 2y = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{1/2}$$

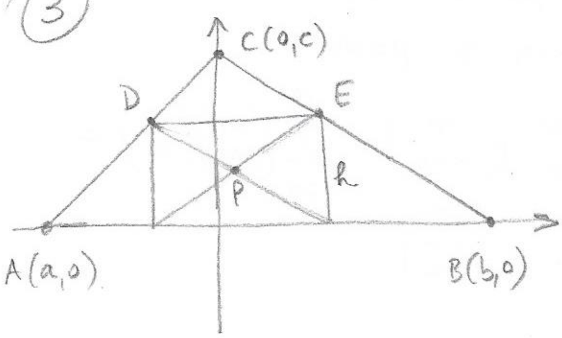
$$e^{g(x)} = e^{\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{1/2}} = \left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{1/2}$$

$$e^{g\left(\frac{7}{25}\right)} = \left(\frac{\frac{7}{25}+1}{1-\frac{7}{25}}\right)^{1/2} = \left(\frac{\frac{32}{25}}{\frac{18}{25}}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{32}{18}\right)^{1/2} = \left(\frac{16}{9}\right)^{1/2} = \frac{4}{3}$$

A

3



RETA AC → $y = \frac{cx}{-a} + c$

D → $y_D = h \to h = -\frac{c x_D}{a} + c \therefore x_D = -\frac{(h-c)a}{c}$

RETA CB → $y = -\frac{cx}{b} + c$

E → $y_E = h \to h = -\frac{c x_E}{b} + c \therefore x_E = -\frac{(h-c)b}{c}$

P → $x_P = \frac{x_D + x_E}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{-ah+ac-bh+bc}{c}\right)$

$y_P = \frac{h}{2} \to x = \frac{(a+b)c - (a+b)2y}{2c}$

$x + \frac{(a+b)}{c} y = \frac{a+b}{2}$

B

4

$$\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$= \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1-1/2} = 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1/2}{1-1/2} = 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1/4}{1-1/2} = 1/2 \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \quad \frac{1/8}{1-1/2} = 1/4 \\ \vdots \end{cases}$$

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{2}{1-1/2} = 4$$

A

OUTRA SOLUÇÃO PA-PG

$$\begin{cases} 2S = 2 + 2 + 3/2 + 4/4 + 5/8 + \dots \\ S = 1 + 2/2 + 3/4 + 4/8 + \dots \end{cases} \ominus$$

$$S = 2 + \underbrace{1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots}_{2} = 4$$

OUTRA SOLUÇÃO SE $|x| < 1$:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

DERIVANDO EM RELAÇÃO A x

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$x = \frac{1}{2} \to 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4$$

5

$P(x) = A(x)\cdot(x-2) + 13 \quad \therefore P(2) = 13$

$P(x) = B(x)\cdot(x+2) + 5 \quad \therefore P(-2) = 5$

$P(x) = C(x)\cdot(x^2-4) + R(x)$

$R(x) = ax + b$ (SE DIVISOR É 2º GRAU, RESTO É 1º GRAU)

$P(2) = R(2) = 2a + b = 13$

$P(-2) = R(-2) = -2a + b = 5$

$4a = 8 \therefore a = 2$

$2b = 18 \therefore b = 9$

$R(x) = 2x + 9 \quad \therefore R(1) = 11$

D

6

A) SE $A^{-1} = A^t$ E $B^{-1} = B^t \to (A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1} = B^t \cdot A^t = (A\cdot B)^t$

SE $\underline{A}$ E $\underline{B}$ SÃO DE REFLEXÃO, $\det A = \det B = -1$ E

$\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B = (-1)\cdot(-1) = 1 \to$ ROTAÇÃO!

B) SEJA $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore A^t = A^{-1} = A \therefore \det A = 1$

SEJA $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \therefore B^t = B^{-1} = B \therefore \det B = 1$

$\underline{A}$ E $\underline{B}$ SÃO DE ROTAÇÃO

MAS $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ QUE NÃO É DE ROTAÇÃO

C) VIMOS NA LETRA $\underline{A}$ QUE SE $A^{-1} = A^t$ E $B^{-1} = B^t$ ENTÃO $(A\cdot B)^{-1} = (A\cdot B)^t$

SE $\underline{A}$ E $\underline{B}$ SÃO DE ROTAÇÃO, $\det A = \det B = 1$ E

$\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1 \to$ ROTAÇÃO (OK)

D) SE $\underline{A}$ É DE ROTAÇÃO, $A^{-1} = A^t$ E $\det(A) = 1$

VEJAMOS $A^{-1} \to (A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^t$? $A = (A^t)^t = A$ (SIM)

MAS $\det(A^{-1}) = 1/\det A = 1 \to$ TAMBÉM É DE ROTAÇÃO

C

ITA - MAT - 1975

BOTELHO

(continuação)

(7) $\operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg} \pi/4 - \operatorname{tg} x/2}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \operatorname{tg} x/2} = \frac{1 - \operatorname{tg} x/2}{1 + \operatorname{tg} x/2} =$$

$$= \frac{1 - \frac{\operatorname{sen} x/2}{\cos x/2}}{1 + \frac{\operatorname{sen} x/2}{\cos x/2}} = \frac{\cos\frac{x}{2} - \operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \operatorname{sen}\frac{x}{2}} \begin{matrix}(\cdot 2\cos\frac{x}{2}) \\ (\cdot 2\cos\frac{x}{2})\end{matrix} =$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{x}{2} - 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\cos x + 1 - \operatorname{sen} x}{\cos x + 1 + \operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{m - n}{m + n}$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1 - \frac{m^2 - 2mn + n^2}{m^2 + 2mn + n^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m^2 + 2mn + n^2 - m^2 + 2mn - n^2}{(m+n)^2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{mn}}{m + n}$$

$$\text{ENTÃO } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\frac{2\sqrt{mn}}{m+n} + 1 - \frac{m-n}{m+n}}{\frac{2\sqrt{mn}}{m+n} + 1 + \frac{m-n}{m+n}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{mn} + m + n - m + n}{2\sqrt{mn} + m + n + m - n} = \frac{2\sqrt{mn} + 2n}{2\sqrt{mn} + 2m} =$$

$$= \frac{\sqrt{mn} + \sqrt{nn}}{\sqrt{mm} + \sqrt{mn}} = \frac{\sqrt{n}(\sqrt{m} + \sqrt{n})}{\sqrt{m}(\sqrt{m} + \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$$

D

(8) $(x^2 + 3x + 2)^2 - 8(x^2 + 2x) - 8x = 4$

$x^4 + 9x^2 + 4 + 6x^3 + 4x^2 + 12x - 8x^2 - 16x - 8x - 4 = 0$

$x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 12x = 0 \quad \therefore x = 0$ É RAIZ

$x^3 + 6x^2 + 5x - 12 = 0 \quad \therefore x = 1$ É RAIZ

BRIOT-RUFFINI PARA ABAIXAR DO 3º PARA O 2º GRAU

	1	6	5	−12
1	1	7	12	0

$x^2 + 7x + 12 = 0 \;\therefore$ SOMA $= -7$ E PRODUTO $= 12$

$x = -3$ E $x = -4$ SÃO RAÍZES

TODAS AS RAÍZES SÃO INTEIRAS $(-4, -3, 0, 1)$

UMA RAIZ É NULA, UMA É POSITIVA E DUAS SÃO NEGATIVAS

A SOMA DOS MÓDULOS DAS RAÍZES É $4 + 3 + 1 = 8$

O MÓDULO DA MAIOR RAIZ É 1

A

(9) VER ITA - MAT - 1974 (QUESTÃO 25)
IME - ALG - 1988/1989 (QUESTÃO 6)

$Z = a + bi \quad \therefore (Z+1)^5 = -Z^5$

$(a + 1 + bi)^5 = -(a + bi)^5$

$|a + 1 + bi| = |a + bi|$

$(a+1)^2 + b^2 = a^2 + b^2$

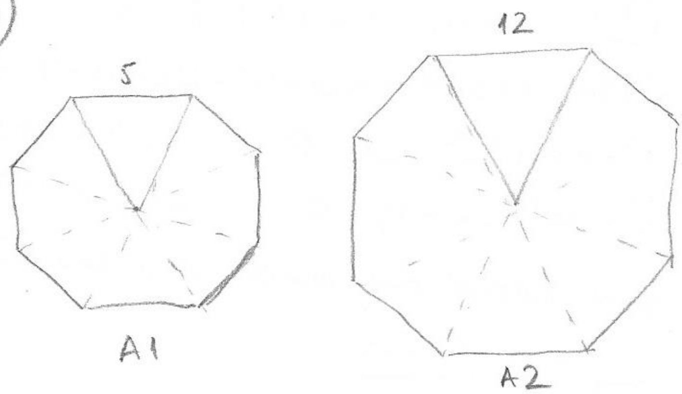
$a^2 + 2a + 1 + b^2 = a^2 + b^2$

$2a + 1 = 0 \quad \therefore a = -1/2$

$R(Z_k) = -\frac{1}{2}$ para $k = 1 \ldots 5$

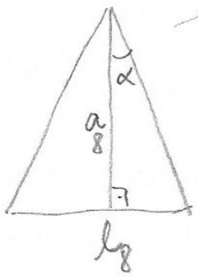
B

10



ÁREA DO OCTÓGONO = 8 · ÁREA DO TRIÂNGULO =

$$= 8 \cdot \frac{l_8 \cdot a_8}{2} = 4 l_8 a_8$$



$$\alpha = \frac{360°}{16} = \frac{90°}{4} = 22{,}5°$$

$$tg\,\alpha = \frac{l_8}{2a_8} \therefore a_8 = \frac{l_8}{2\,tg\,\alpha}$$

$$\text{ÁREA} = \frac{4 l_8 \cdot l_8}{2\,tg\,\alpha} = \frac{2 l_8^2}{tg\,\alpha}$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} \therefore tg\,45° = \frac{2\,tg\,22{,}5°}{1 - tg^2\,22{,}5°}$$

$$1 - y^2 = 2y \therefore y^2 + 2y - 1 = 0$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot(-1)}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$y = tg\,22{,}5° = \sqrt{2} - 1$ → MAS NEM PRECISA

$$A3 = A_1 + A_2$$

$$\frac{2 l_{8,3}^2}{tg\,\alpha} = \frac{2 l_{8,1}^2}{tg\,\alpha} + \frac{2 l_{8,2}^2}{tg\,\alpha}$$

$l_{8,3}^2 = 5^2 + 12^2 = 169$ → TRIÂNGULO RETÂNGULO 5, 12, 13

$l_{8,3} = 13$ cm //

D //

11 SE $P(y)$ É DIVISÍVEL POR $Q(y)$, A RAIZ DE $Q(y)$ É RAIZ DE $P(y)$

$$P(csc^2 x - ctg^2 x) = 0$$

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ → x É 2º QUADRANTE

$sen\,x > 0 \therefore cos\,x < 0 \therefore tg\,x < 0$

$csc\,x > 0 \therefore sec\,x < 0 \therefore ctg\,x < 0$

$$csc^2 x - ctg^2 x = \frac{1}{sen^2 x} - \frac{cos^2 x}{sen^2 x} = \frac{sen^2 x}{sen^2 x} = 1$$

$$P(1) = 0$$

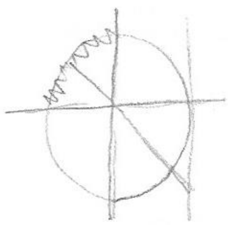
$$1 - (tg\,x)^2 + tg\,x + \underbrace{\frac{1}{cos^2 x} - \frac{sen^2 x}{cos^2 x}}_{\frac{cos^2 x}{cos^2 x} = 1} = 0$$

$$(tg\,x)^2 - tg\,x - 2 = 0$$

$$tg\,x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

→ -1 SIM
→ 2 NÃO

SOMA = 1 E PRODUTO = −2



2º QUADRANTE → $tg\,x < 0$

$tg\,x = -1 \therefore x = 135° = \frac{3\pi}{4}$

$sen\,x = \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore cos\,x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$csc\,x = \sqrt{2} \therefore sec\,x = -\sqrt{2}$

$csc\,x = -sec\,x$ //

B //

ITA - MAT - 1975

BOTELHO
(continuação)

(12) $z_1 = a+bi \therefore z_2 = c+di$

$z_1+z_2 = a+c+(b+d)i$

SE z_1+z_2 É REAL, ENTÃO $b+d=0 \therefore b=-d$

$z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

SE $z_1\cdot z_2$ É REAL, ENTÃO $ad+bc=0$

$ad-cd=0 \therefore ad=cd$

SE $d=0 \to b=0 \to z_1=a$ E $z_2=c$

$\to z_1$ E z_2 SÃO AMBOS REAIS //

SE $d\neq 0 \to a=c \to z_1=a+bi$

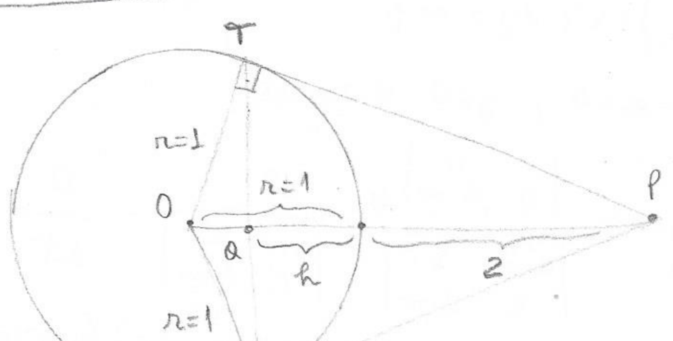
$z_2=a-bi$

$\to z_1$ E z_2 SÃO COMPLEXOS CONJUGADOS //

$z_1=\overline{z_2}$

A //

(13)



$K = \frac{A_{ESFERA}}{A_{CALOTA}} > 1 \therefore A_{ESFERA}=4\pi r^2=4\pi$

$A_{CALOTA}=2\pi r\cdot h=2\pi h \therefore K=\frac{4\pi}{2\pi h}=\frac{2}{h}$

TRIÂNGULO RETÂNGULO OPT $\to PT^2=OP\cdot PQ$

$PT^2=OP^2-OT^2=9-1=8 \therefore 8=3\cdot PQ$

$PQ=\frac{8}{3} \therefore h=PQ-2=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3} \therefore K=\frac{2}{2/3}=3$ //

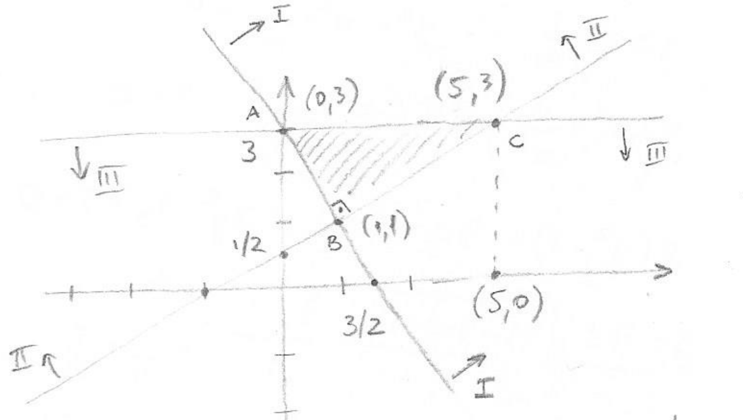
C //

(14) $2x+y-3>0 \therefore y>-2x+3$ (I)

$x-2y+1<0 \therefore y>\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ (II)

$y-3<0 \therefore y<3$ (III)

$x+my-5<0$ (IV)



$(-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=-1 \to$ RETAS DE (I) E (II) SÃO $\perp$

RETA LIMITE EM (IV) $\to$ SE $y=0 \to x=5$

ELA SEMPRE PASSA POR $(5,0)$

INTERSEÇÃO DAS RETAS DE (I) E (III) = A

$y=3 \therefore 3=-2x+3 \therefore x=0$

(IV) PASSA SE $0+3m-5=0 \therefore m=5/3$

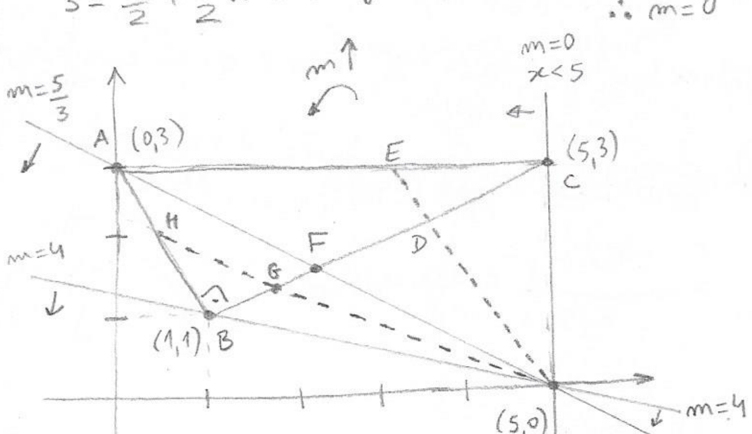
INTERSEÇÃO DAS RETAS DE (I) E (II) = B

$-2x+3=\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \therefore -4x+6=x+1 \therefore 5x=5$

$x=1 \therefore y=1 \therefore$ (IV) PASSA SE $1+m-5=0 \therefore m=4$

INTERSEÇÃO DAS RETAS DE (II) E (III) = C

$3=\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \therefore x=5 \therefore y=3 \therefore$ (IV) PASSA SE $5+3m-5=0$
$\therefore m=0$



$0<m<5/3 \to$ QUADRILÁTERO "ABDE"

$5/3<m<4 \to$ ◺ "B"GH" //

$m>4 \to$ CONJUNTO VAZIO

$m<0 \to$ ◺ ABC //

C //

(15) $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$

EQUAÇÃO RECÍPROCA DE 1ª ESPÉCIE E GRAU PAR

DIVIDIR POR x^2

$$2x^2 - 7x + 9 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$y = x + \frac{1}{x} \quad \therefore \quad y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0$$

$$2(y^2 - 2) - 7y + 9 = 0 \quad \therefore \quad 2y^2 - 7y + 5 = 0$$

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{4} = \frac{7 \pm 3}{4} \begin{cases} \nearrow 1 \\ \searrow \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$x + \frac{1}{x} = 1 \quad \therefore \quad x^2 - x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad //$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad \therefore \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \begin{cases} \nearrow 1/2 \; // \\ \searrow 2 \; // \end{cases}$$

A) a, b, c, d NÃO SÃO RAÍZES REAIS POSITIVAS

B) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a+b+c+d)^2 - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) =$

$$= \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{49}{4} - \frac{36}{4} = \frac{13}{4}$$

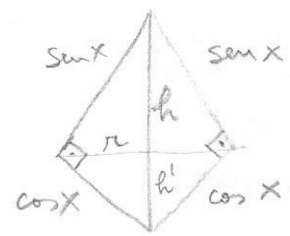
C) $a, b, c, d \longrightarrow$ 2 REAIS E 2 COMPLEXOS

D) $$\frac{1}{bcd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{abd} + \frac{1}{abc} = \frac{a+b+c+d}{abcd} =$$

$$= \frac{7/2}{2/2} = \frac{7}{2} = a+b+c+d \quad //$$

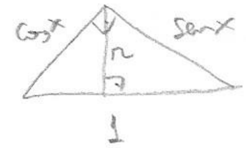
D //

(16)



DOIS CONES

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} + \frac{\pi r^2 h'}{3} = \frac{\pi r^2}{3}\underbrace{(h + h')}_{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} = 1}$$



"$ah = bc$"

$$1 \cdot r = \operatorname{sen} x \cos x$$

$$r = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$$

$$V = \pi = \frac{\pi r^2}{3} \quad \therefore \quad r^2 = 3 \quad \therefore \quad r = \sqrt{3}$$

$\operatorname{sen} 2x = 2\sqrt{3}$ $\therefore$ NÃO HÁ SOLUÇÃO REAL //

E //

(17) $AX = mX \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx \\ my \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} ax + by = mx \\ cx + dy = my \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (a-m)x + by = 0 \\ cx + (d-m)y = 0 \end{cases}$$

$x = 0$, $y = 0$ É SOLUÇÃO

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d-m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-m & b \\ c & d-m \end{vmatrix}} = \frac{0}{\begin{vmatrix} a-m & b \\ c & d-m \end{vmatrix}} = \frac{0}{det}$$

SE $det = 0 \rightarrow$ INFINITAS SOLUÇÕES (INDETERMINADO)

SE $det \neq 0 \rightarrow$ SOLUÇÃO ÚNICA $(0,0)$ (POSSÍVEL E DETERMINADO)

$$A - mI = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-m & b \\ c & d-m \end{pmatrix}$$

$det = det(A - mI)$

SE $det(A - mI) = 0 \rightarrow$ HÁ SOLUÇÕES TAIS QUE $x \neq 0$ E $y \neq 0$,

LOGO, $x + y \neq 0$ E (OU) $x \cdot y \neq 0$ //

SE $det(A - mI) \neq 0 \rightarrow x + y = 0$ E $x \cdot y = 0$

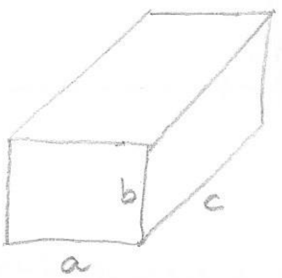
B //

ITA – MAT – 1975

BOTELHO

(continuação)

(18)



$$a = k \ln t$$
$$b = k \ln t^2 = 2k \ln t = 2a$$
$$c = k \ln t^3 = 3k \ln t = 3a$$
$$S_{TOTAL} = 2(ab + ac + bc) = 792$$
$$2(a \cdot 2a + a \cdot 3a + 2a \cdot 3a) = 792$$
$$22a^2 = 792 \therefore \begin{array}{r|l} 792 & 22 \\ \hline 66 & 36 \\ 132 & \\ 0 & \end{array} \therefore a^2 = 36$$

$$a = 6 \rightarrow b = 2a = 12 \rightarrow c = 3a = 18$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{DIMENSÕES} = 12k \\ a + b + c = a + 2a + 3a = 6a = 12k \end{array}\right\} \text{DADO DISPENSÁVEL}$$

A

(19) O Nº DE SOLUÇÕES INTEIRAS E NÃO NEGATIVAS (AS VARIÁVEIS PODEM VALER ZERO) É O Nº DE MANEIRAS DE SE PERMUTAR 7 PONTOS E 3 BARRAS

$\bullet \mid \bullet\ \bullet \mid \bullet\ \bullet \mid \bullet\ \bullet$

$x=1 \quad y=2 \quad z=2 \quad t=2$

$$\begin{array}{r} 7 \text{ PONTOS} \\ + \ 3 \text{ BARRAS} \\ \hline 10 \text{ SÍMBOLOS} \end{array}$$

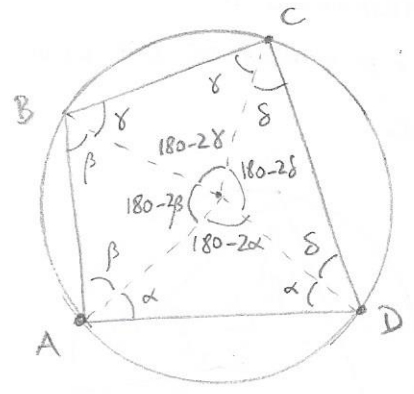
$\mid \bullet\ \bullet\ \bullet \mid \mid \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet$

$x=0 \quad y=3 \quad z=0 \quad t=4$

$$m = \frac{10!}{7!\,3!} = \binom{10}{3}$$

C

(20)

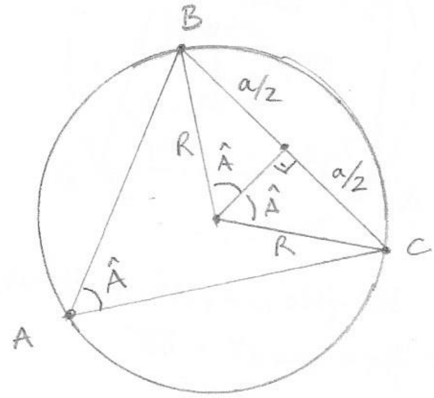


$$180° - 2\delta = 360° - (180° - 2\alpha + 180° - 2\beta + 180° - 2\gamma) =$$
$$= 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 180°$$
$$\delta = 180° - \alpha - \beta - \gamma$$
$$\hat{A} + \hat{C} = \alpha + \beta + \gamma + \delta = \alpha + \beta + \gamma + 180° - \alpha - \beta - \gamma = 180°$$
$$\hat{A} = 2\hat{C} \therefore 2\hat{C} + \hat{C} = 3\hat{C} = 180° \therefore \hat{C} = 60° \therefore \hat{A} = 120°$$

$$\operatorname{tg}\hat{B} \cdot \operatorname{tg}\hat{D} + \operatorname{sen}\hat{A} \cdot \operatorname{sen}\hat{C} = -\frac{9}{4}$$
$$\hat{B} + \hat{D} = \beta + \gamma + \alpha + \delta = \alpha + \beta + \gamma + 180° - \alpha - \beta - \gamma = 180°$$
$$\operatorname{tg}\hat{D} = \operatorname{tg}(180° - \hat{B}) = -\operatorname{tg}\hat{B}$$
$$\operatorname{sen}\hat{A} = \operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \operatorname{sen}\hat{C} = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$-(\operatorname{tg}\hat{B})^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{9}{4} \therefore (\operatorname{tg}\hat{B})^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3$$
$$\operatorname{tg}\hat{B} = \pm\sqrt{3} \therefore \text{COMO } \hat{B} > \hat{D},\ \operatorname{tg}\hat{B} = -\sqrt{3} \therefore \hat{B} = 120°$$
$$\hat{D} = 180° - \hat{B} = 180° - 120° = 60°$$

D

(21) TODO TRIÂNGULO TEM UM CÍRCULO CIRCUNSCRITO, CUJO CENTRO É A INTERSEÇÃO DAS MEDIATRIZES DE AB, AC E BC



$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{a}{2R} \therefore \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = 2R$$

LEI DOS SENOS

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R$$

$$a \operatorname{sen}(\hat{B}-\hat{C}) + b \operatorname{sen}(\hat{C}-\hat{A}) + c \operatorname{sen}(\hat{A}-\hat{B}) =$$

$$2R\left[\operatorname{sen}\hat{A}\operatorname{sen}(\hat{B}-\hat{C}) + \operatorname{sen}\hat{B}\operatorname{sen}(\hat{C}-\hat{A}) + \operatorname{sen}\hat{C}\operatorname{sen}(\hat{A}-\hat{B})\right] =$$

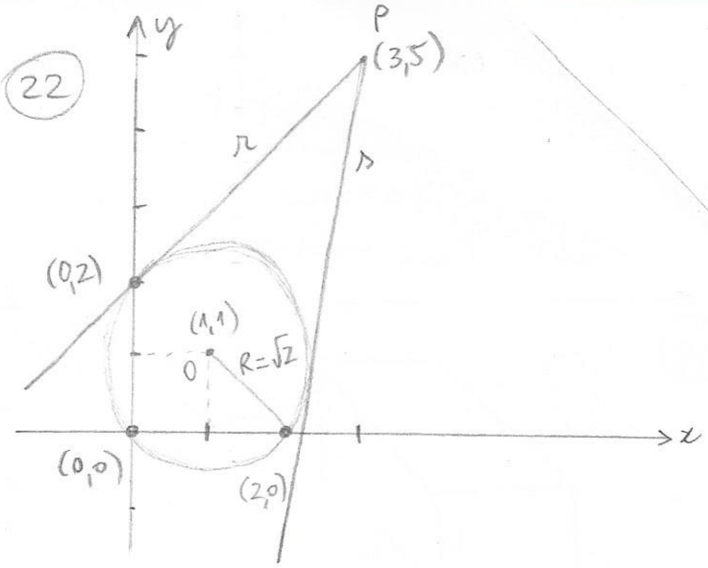
$$= 2R\Big[\operatorname{sen}\hat{A}(\operatorname{sen}\hat{B}\cos\hat{C} - \operatorname{sen}\hat{C}\cos\hat{B}) +$$
$$+ \operatorname{sen}\hat{B}(\operatorname{sen}\hat{C}\cos\hat{A} - \operatorname{sen}\hat{A}\cos\hat{C}) +$$
$$+ \operatorname{sen}\hat{C}(\operatorname{sen}\hat{A}\cos\hat{B} - \operatorname{sen}\hat{B}\cos\hat{A})\Big] =$$

$$= 2R\Big[\operatorname{sen}\hat{A}\operatorname{sen}\hat{B}\cos\hat{C} - \operatorname{sen}\hat{A}\cos\hat{B}\operatorname{sen}\hat{C} +$$
$$+ \cos\hat{A}\operatorname{sen}\hat{B}\operatorname{sen}\hat{C} - \operatorname{sen}\hat{A}\operatorname{sen}\hat{B}\cos\hat{C} +$$
$$+ \operatorname{sen}\hat{A}\cos\hat{B}\operatorname{sen}\hat{C} - \cos\hat{A}\operatorname{sen}\hat{B}\operatorname{sen}\hat{C}\Big] =$$

$$= 0$$

C

(22)



UMA RETA TANGENTE À CIRCUNFERÊNCIA (r OU s) DEVE CONTER O PONTO (3,5) E DISTAR $\sqrt{2}$ DE (1,1)

$$y - y_P = m(x - x_P)$$

$$y - 5 = m(x-3) \therefore mx - y + 5 - 3m = 0$$

$$d_{O,\text{reta}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$d_{O,\text{tangente}} = \frac{|m\cdot 1 - 1 + 5 - 3m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{2}$$

$$|-2m+4| = \sqrt{2m^2+2}$$

$$4m^2 - 16m + 16 = 2m^2 + 2 \therefore 2m^2 - 16m + 14 = 0$$

$m^2 - 8m + 7 = 0 \therefore$ SOMA = 8 E PRODUTO = 7

$m = 1$ ou $m = 7$

$r: x - y + 5 - 3 = 0 \therefore x - y + 2 = 0$

$s: 7x - y + 5 - 21 = 0 \therefore 7x - y - 16 = 0$

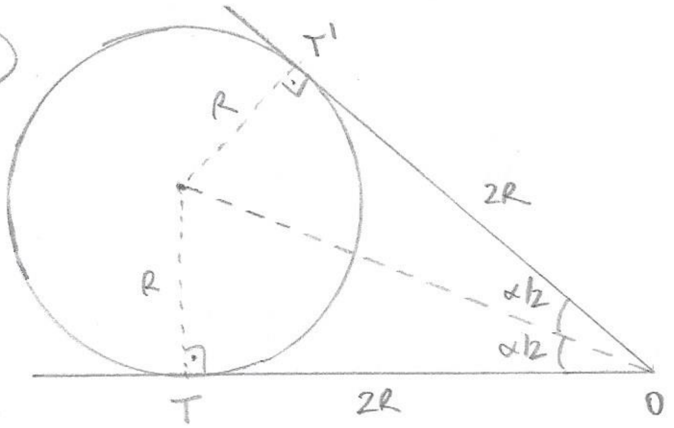
C

ITA - MAT - 1975

BOTELHO

(continuação)

(23)



$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha/2}{1 - tg^2\alpha/2} = \frac{2\cdot 1/2}{1 - 1/4} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$$

$\operatorname{sen}\alpha = 4/5$ E $\cos\alpha = 3/5$ //

A //

(24) $4^x + 6^x = 9^x \therefore 2^{2x} + 2^x\cdot 3^x = 3^{2x}$

$(\div 2^{2x}) \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^{x} - 1 = 0$

$y = \left(\frac{3}{2}\right)^x \rightarrow y^2 - y - 1 = 0 \therefore y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot(-1)}}{2}$

$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ PORQUE $y > 0$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \therefore x \log\left(\frac{3}{2}\right) = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$x = \left[\log\left(\frac{3}{2}\right)\right]^{-1} \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ //

B //

(25) $x_1 = \frac{\pi}{3} \therefore tg\,x_1 = \sqrt{3} = 3^{1/2}$

$x_2 = \operatorname{arc} tg\left(\sqrt{tg\,x_1}\right) \rightarrow$ SUPONDO QUE n TAMBÉM POSSA SER 1

$tg\,x_2 = \sqrt{tg\,x_1} = 3^{1/4}$

$tg\,x_n = 3^{1/2^n}$

$S = \log_3 3^{1/2} + \log_3 3^{1/4} + \log_3 3^{1/8} + \ldots$

$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

$S = \frac{1/2}{1 - 1/2} = \frac{1/2}{1/2} = 1$ //

D //