MINISTÉRIO DA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE PESQUISAS E DESENVOLVIMENTO
CENTRO TÉCNICO AEROESPACIAL
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

CONCURSO DE ADMISSÃO - 1974

EXAME DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. A duração da prova é de 4 horas.
2. A prova de Matemática consta de 25 questões de Múltipla Escôlha.
3. Só há uma resposta certa em cada questão.
4. NÃO DEIXE DE RESPONDER NENHUMA QUESTÃO. QUANDO EM DÚVIDA, ASSINALE A RESPOSTA QUE LHE PARECER MAIS CORRETA.
5. Questões não respondidas ocasionam rejeição do cartão pelo computador, podendo prejudicar o candidato.
6. Assinale com um traço curto e forte de lápis o espaço correspondente a cada questão, na folha de respostas.
7. Verificando algum engano na resposta poderá corrigí-la usando borracha.
8. Observe cuidadosamente o número das questões ao respondê-las.
9. N.d.r.a significa: " nenhuma das respostas anteriores ".
10. O agente fiscal fornecerá papel para rascunho, o qual não será considerado na correção da prova.
11. Não será permitido o uso de tabelas, régua de cálculo, máquina de calcular, apontamentos, formulários e outros papéis a não ser os fornecidos pelo fiscal.
12. O caderno de questões contém alem desta página de instruções, quatro páginas numeradas de 1 a 4.
13. LIDAS AS PRESENTES INSTRUÇÕES E PREENCHIDO O CABEÇALHO DA FOLHA DE RESPOSTAS AGUARDE ORDEM DO FISCAL PARA INICIAR O EXAME.

1. Sejam A, B e C conjuntos contidos num mesmo conjunto U.
Seja x um elemento de U.

Definindo-se $\complement_B A = \{ x \in U \mid x \in B \text{ e } x \notin A \}$ então $\complement_C (A \cup B)$ é igual a:

a) $\complement_C A \cup \complement_C B$

b) $\complement_C A \cap \complement_C B$

c) $\complement_A B$

d) O conjunto vazio

e) n.d.r.a.

2. Sejam A, B e D subconjuntos não vazios do conjunto R dos números reais. Sejam as funções $f: A \to B$ $(y = f(x))$, $g: D \to A$ $(x = g(t))$, e a função composta $(g \circ f): E \to K$ (e, portanto, $Z = (g \circ f)(t) = f(g(t))$.
Então os conjuntos E e K são tais que:

a) $E \subset A$ e $K \subset D$

b) $E \subset B$ e $K \supset A$

c) $E \supset D$, $D \neq E$ e $K \subset B$

d) $E \subset D$ e $K \subset B$

e) n.d.r.a.

3. O volume de um tetraedro regular de aresta igual a ℓ é:

a) $\ell \sqrt{2}$

b) $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\ell^2\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{\ell^3\sqrt{3}}{2}$

e) n.d.r.a.

4. Seja $a > 0$ o 1º termo de uma progressão aritmética de razão r e também de uma progressão geométrica de razão $q = \frac{2r\sqrt{3}}{3a}$.
A relação entre a e r para que o 3º termo da progressão geométrica coincida com a soma dos 3 primeiros termos da progressão aritmética é:

a) $r = 3a$ b) $r = 2a$ c) $r = a$

d) $r = \sqrt{2a}$ e) n.d.r.a.

5. Sobre a raiz da equação

$$3^{x} - \frac{15}{3^{x-1}} + 3^{x-3} = \frac{23}{3^{x-2}}$$

podemos afirmar:

a) não é real b) é menor que -1

c) está no intervalo $[0,6]$ d) é um número primo

e) n.d.r.a.

6. A condição para que $\binom{n}{k}$ seja o dobro de $\binom{n}{k-1}$ é que:

a) $n + 1$ seja múltiplo de 3 b) n seja divisível por 3

c) $n - 1$ seja par d) $n = 2k$

e) n.d.r.a.

7. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Então temos:

a) $B\,A = I$ b) $B\,A = A\,B$ c) $A = 2\,B$

d) $A\,I = B\,Z$ e) n.d.r.a.

8. Seja a equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & -22 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podemos afirmar:

a) a equação tem uma e somente uma solução

b) a equação tem duas e somente duas soluções

c) a equação tem três e somente três soluções

d) a equação não tem solução

e) n.d.r.a.

9. O valor da expressão $x = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\theta}{1 - \mathrm{tg}^2\theta}$ quando $\cos\theta = -\dfrac{3}{7}$ e $\mathrm{tg}\theta < 0$, é:

a) $\dfrac{4\sqrt{10}}{31}$

b) $-\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$

c) $\dfrac{2\sqrt{10}}{15}$

d) $\dfrac{3\sqrt{10}}{7}$

e) n.d.r.a.

10. $\left[\dfrac{1 - \mathrm{tg}\,x}{1 + \mathrm{tg}\,x}\right]^2$ vale:

a) $\dfrac{1 - 2\,\mathrm{sen}\,2x}{1 + \mathrm{sen}\,2x}$

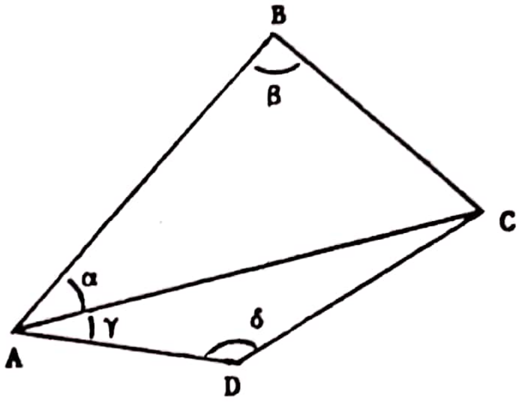
b) $\dfrac{1 + 2\,\mathrm{sen}\,2x}{1 - \mathrm{sen}\,2x}$

c) $\dfrac{1 + \mathrm{sen}\,2x}{1 - \mathrm{sen}\,2x}$

d) $\dfrac{1 - \mathrm{sen}\,2x}{1 + \mathrm{sen}\,2x}$

e) n.d.r.a.

11. Seja $\overline{BC} = \overline{CD}$ no quadrilátero ABCD, mostrado na figura abaixo. Então podemos garantir que:



a) $\dfrac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \delta} = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta}$

b) $\gamma\beta = \alpha\delta$

c) $\text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta = \text{tg } \gamma \cdot \text{tg } \delta$

d) $\overline{BC}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AB}$

e) n.d.r.a.

12. A reta que passa pelas intersecções das circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$, é tal que:

a) tem equação $\frac{3}{5}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{4} = 0$

b) não passa pela origem

c) passa pela origem

d) não é perpendicular a reta que passa pelos centros das circunferên-cias

e) n.d.r.a.

13. Os zeros da função $P(x) = 3x^6 - 8x^5 + 3x^4 + 2x^3$ são:

a) todos inteiros

b) 2 imaginários puros e 4 reais

c) todos racionais

d) 4 racionais e 2 irracionais

e) n.d.r.a.

14. A equação $x^n - 1 = 0$, onde n é um número natural maior do que 5, tem:

a) 1 raiz positiva, 1 raiz negativa e $(n - 2)$ raizes complexas quando n é par

b) 1 raiz positiva, $(n - 1)$ raizes não reais quando n é par

c) 1 raiz negativa, $(n - 1)$ raizes complexas quando n é impar

d) 1 raiz positiva, 1 raiz negativa e $(n - 2)$ raizes complexas quando n é um número natural qualquer.

e) n.d.r.a.

15. O valor absoluto da soma das duas menores raizes da equação

$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 4$ é:

a) 2

b) 3

c) $\frac{4 - \sqrt{3}}{2}$

d) 4

e) n.d.r.a.

16. Se a, b, c, são raizes da equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$, então o valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ é:

a) $\frac{1}{4}$

b) $-\frac{1}{4}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{2}$

e) n.d.r.a.

17. O conjunto de todos os valores de x para os quais existe um y real de modo que

$$y = \log_{10}\left[\log_{10}\left(\frac{7 - 2x - x^2}{3 - 4x^2}\right)\right]$$ é dado por:

a) intervalo aberto A, de extremos $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$

b) intervalo aberto A, de extremos $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$

c) intervalo aberto A, de extremos 0 e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) intervalo aberto A, de extremos $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e 1

e) n.d.r.a.

18. Um lado de um triângulo ABC mede ℓ cm
Os valores dos ângulos dos ℓ lados do triângulo formam duas progressões aritméticas. A área S desse triângulo é:

a) $\ell^2\ (\sqrt{3} + 1)\mathrm{cm}^2$

b) $\ell^2\ (\sqrt{3} - 1)\mathrm{cm}^2$

c) $\ell^2\ \sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$

d) $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\ \mathrm{cm}^2$

e) n.d.r.a.

19. Sendo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais, o maior valor de n tal que as igualdades ao lado são verdadeiras é:

$\log_{10} 123478 = a_1$

$\log_{10} a_1 = a_2$

....

$\log_{10} a_{n-1} = a_n$

a) $n = 3$

b) $n = 4$

c) $n = 5$

d) $n = 6$

e) n.d.r.a.

20. Seja $M = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, onde a, b, c são as raizes da equação $x^3 - \sqrt{3}\,x^2 + 54 = 0$

Então podemos afirmar que:

a) $\log_3 M$ é um número irracional

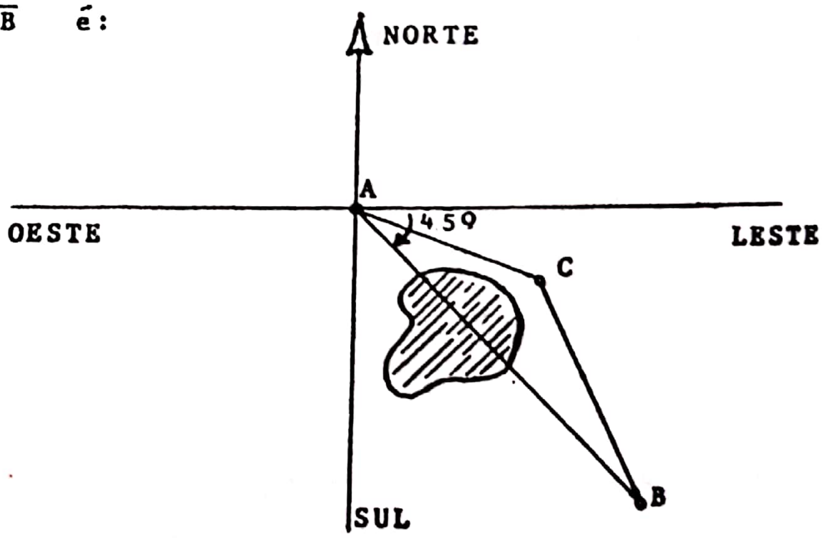
b) $\log_3 M$ é um número primo

c) $\log_3 M = \frac{5}{3}$

d) $\log_3 M = -\frac{5}{2}$

e) n.d.r.a.

21. Deseja-se construir uma ferrovia ligando o ponto A ao ponto B que está $40\sqrt{2}$ Km a sudeste de A. Um lago, na planície onde estão A e B impede a construção em linha reta.
Para contornar o lago, a estrada será construida em 2 trechos retos com o vértice no ponto C, que está 36 Km a leste e 27 Km ao sul de A.
O comprimento do trecho $\overline{CB}$ é:



a) $\sqrt{182}$ Km

b) $\sqrt{183}$ Km

c) $\sqrt{184}$ Km

d) $\sqrt{185}$ Km

e) n.d.r.a.

22. O conjunto dos valores de k, para os quais $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - k$ tem um ou três zeros reais entre 1 e 2, é:

a) $k < 2$

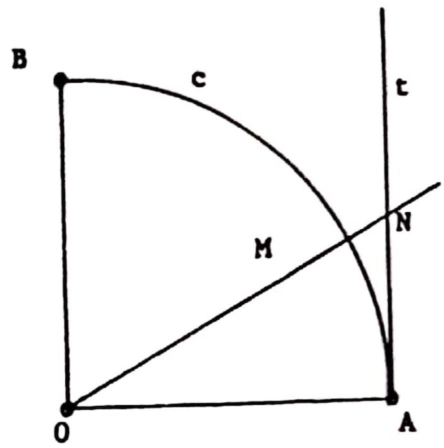
b) $1 < k < 2$

c) $2 > k$ ou $k > 6$

d) $k > 7$

e) n.d.r.a.

23. Seja c um quarto de circunferência $\widehat{AB}$ de raio R e centro O, e seja t a reta tangente a c em A.
Traça-se pelo centro O de c uma reta que corta c num ponto M, e corta a reta tangente num ponto N, distintos de A.
Seja k a razão entre o volume gerado pelo setor OAM e o volume gerado pelo triângulo OAN, ambos obtidos girando-se de 2π em torno de $\overline{AO}$.
O comprimento do segmento $\overline{AN}$ é igual ao raio R se:



a) $1 < k < 2,5$

b) $2,5 \leq k \leq 3$

c) $0 < k \leq 2$

d) $0 < k < 1,5$

e) n.d.r.a.

24. Um cone equilátero está inscrito em uma esfera de raio 4 cm. Cortam-se os sólidos (esfera e cone) por um plano paralelo à base, de modo que a diferença entre as áreas das secções seja igual à área da base do cone. O raio da secção do cone é :

a) $2\sqrt{3}$ cm

b) $\sqrt{3}$ cm

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm

d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm

e) n.d.r.a.

25. Seja z_k um número complexo, solução da equação

$(z + 1)^5 + z^5 = 0$, $k = 0,1,2,3,4$.

Podemos afirmar que:

a) todos os z_k , $k = 0,1, \dots , 4$ estão sobre uma circunferência

b) todos os z_k , $k = 0,1, \dots , 4$ estão sobre uma reta paralela ao eixo real

c) todos os z_k , $k = 0,1, \dots , 4$ estão sobre uma reta paralela ao eixo imaginário

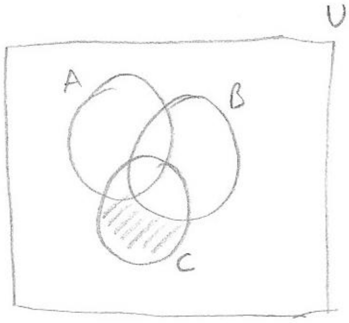
d) a equação não admite solução

e) n.d.r.a.

ITA – MAT – 1974

BOTELHO

(1)

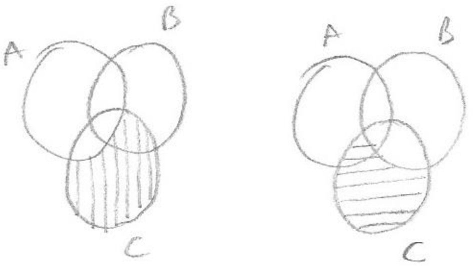


$\underset{B}{C}\,A$ = COMPLEMENTAR DE $\underline{B}$ EM RELAÇÃO A $\underline{\underline{A}}$

$= B - A$

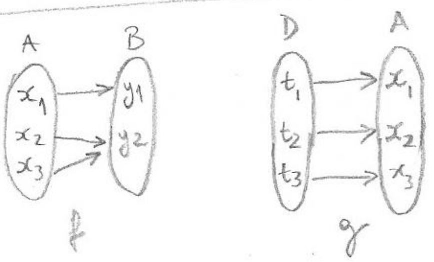
$\underset{C}{C}\,A \cup B = C - (A \cup B) \rightarrow$ HACHURADO

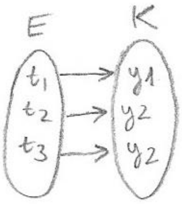
ISSO EQUIVALE A $\underset{C}{C}\,A \cap \underset{C}{C}\,B$ //



B //

(2)





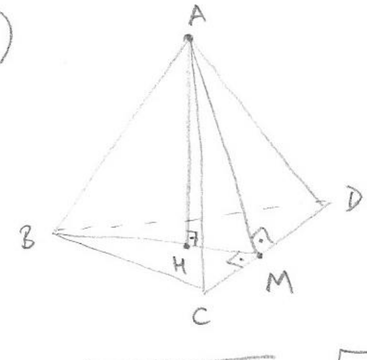
$E \subset D \quad (t_1, t_2 \ldots)$

$K \subset B \quad (y_1, y_2 \ldots)$

$g \circ f \underset{?}{=} f(g(t))$

D //

(3)



$V = \frac{1}{3} \cdot S_{BCD} \cdot AH$

$S_{BCD} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

(TRIÂNGULO EQUILÁTERO)

$AH = \sqrt{AM^2 - HM^2} = \sqrt{\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{6}\right)^2} =$

ALTURA DE TRIÂNGULO EQUILÁTERO

1/3 DE ALTURA DE TRIÂNGULO EQUILÁTERO

$= \sqrt{\frac{3\ell^2}{4} - \frac{3\ell^2}{36}} = \ell\sqrt{\frac{27-3}{36}} = \frac{\ell}{6}\sqrt{24} =$

$= \frac{\ell\sqrt{6}}{3}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\ell\sqrt{6}}{3} = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12}$ // N.D.R.A. //

E //

(4) PA: $a,\ a+r,\ a+2r \therefore S_3 = 3a+3r$

PG: $a,\ aq,\ aq^2 \quad \therefore aq^2 = 3a+3r$

$a \cdot \frac{4r^2 \cdot 3}{9a^2} = \frac{4r^2}{3a} = 3a + 3r$

$4r^2 = 9a^2 + 9ar \therefore 4r^2 - 9ar - 9a^2 = 0$

$r = \frac{9a \pm \sqrt{81a^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9a^2)}}{8} = \frac{9a \pm 15a}{8}$

$r = 3a$ // $\underline{\text{OU}}$ $r = -\frac{6a}{8} = \frac{-3a}{4}$ //

PROVA 1 $\rightarrow S_3 = 3a + 9a = 12a$

$q = \frac{2 \cdot 3a \cdot \sqrt{3}}{3a} = 2\sqrt{3} \therefore q^2 = 12 \therefore aq^2 = 12a$ OK

PROVA 2 $\rightarrow S_3 = 3a - \frac{9a}{4} = \frac{3a}{4}$

$q = \frac{2\sqrt{3}}{3a} \cdot \left(\frac{-3a}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \therefore q^2 = \frac{3}{4} \therefore aq^2 = \frac{3a}{4}$ OK

HÁ DUAS RELAÇÕES ENTRE $\underline{r}$ E $\underline{a}$

E //

(5) $3^x - \dfrac{15}{3^{x-1}} + 3^{x-3} = \dfrac{23}{3^{x-2}}$

$3^x - \dfrac{15}{3^x \cdot \frac{1}{3}} + 3^x \cdot \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{23}{3^x \cdot \frac{1}{3^2}}$

$3^x - \dfrac{45}{3^x} + \dfrac{3^x}{27} = \dfrac{23 \cdot 9}{3^x} = \dfrac{207}{3^x}$

$\dfrac{28}{27} \cdot 3^x = \dfrac{252}{3^x} \therefore 3^{2x} = \dfrac{252 \cdot 27}{28}$

$252 \div 7 = 36$ (42, 0) $\therefore 3^{2x} = \dfrac{36 \cdot 27}{4} = 9 \cdot 27$

$3^{2x} = 3^2 \cdot 3^3 = 3^5 \therefore x = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

A RAIZ ESTÁ NO INTERVALO $[0,6]$

C

(6) $\dbinom{m}{k} = 2\dbinom{m}{k-1} \therefore \dfrac{m!}{(m-k)!\,k!} = \dfrac{2 \cdot m!}{(m-k+1)!\,(k-1)!}$

$\dfrac{1}{k} = \dfrac{2}{m-k+1} \therefore m-k+1 = 2k \therefore m+1 = 3k$

A

(7) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2+2\cdot0 & 1\cdot4+2\cdot4 \\ 0\cdot2+4\cdot0 & 0\cdot4+4\cdot4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow B \cdot A \neq I$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+4\cdot0 & 2\cdot2+4\cdot4 \\ 0\cdot1+4\cdot0 & 0\cdot2+4\cdot4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 20 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \longrightarrow B \cdot A \neq A \cdot B$

$2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow A \neq 2 \cdot B$

$A \cdot I = A$

$B \cdot Z = Z$ $\rightarrow A \cdot I \neq B \cdot Z$

N.D.R.A.

E

(8) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & -22 & -11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & -22 & -11 \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{det}$

$det = 1(-1)(-11) + 3(-22)\cdot5 + 1\cdot4\cdot7 -$

$- 1\cdot7\cdot(-22) - 1(-1)\cdot5 - 3\cdot4\cdot(-11) =$

$= 11 - 330 + 28 + 154 + 5 + 132$

159

170

160

330

0

$x = \dfrac{0}{0} =$ SISTEMA INDETERMINADO

INFINITAS SOLUÇÕES

E

(9) $x = \dfrac{2\,tg\,\theta}{1 - tg^2\theta} = tg\,2\theta$

$\cos\theta = -\dfrac{3}{7} \therefore sen\,\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \dfrac{9}{49}}$

$sen\,\theta = \dfrac{\sqrt{40}}{7} = \dfrac{2\sqrt{10}}{7} > 0$ PORQUE $tg\,\theta < 0$

E $\cos\theta < 0$

$sen\,2\theta = 2\,sen\,\theta\cos\theta = 2 \cdot \dfrac{2\sqrt{10}}{7} \cdot \left(-\dfrac{3}{7}\right) = \dfrac{-12\sqrt{10}}{49}$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2 \cdot \dfrac{9}{49} - 1 = \dfrac{18}{49} - \dfrac{49}{49} = \dfrac{-31}{49}$

$tg\,2\theta = \dfrac{sen\,2\theta}{\cos 2\theta} = \dfrac{-12\sqrt{10}}{49} \cdot \left(-\dfrac{49}{31}\right) = \dfrac{12\sqrt{10}}{31}$

N.D.R.A. E

ITA – MAT – 1974

BOTELHO

(continuação)

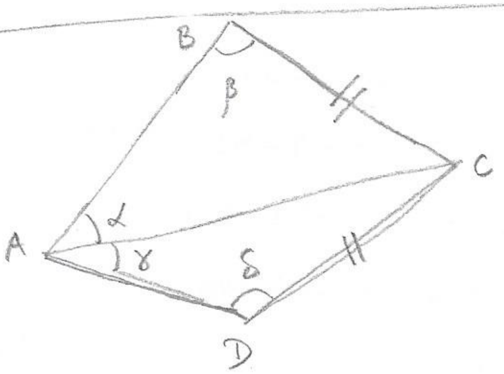
(10) $\left(\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\right)^2 = \left(\dfrac{1-\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}{1+\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}\right)^2 =$

$= \left(\dfrac{\cos x - \operatorname{sen}x}{\cos x + \operatorname{sen}x}\right)^2 = \dfrac{\cos^2 x - 2\operatorname{sen}x\cos x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x + 2\operatorname{sen}x\cos x + \operatorname{sen}^2 x} =$

$= \dfrac{1 - 2\operatorname{sen}x\cos x}{1 + 2\operatorname{sen}x\cos x} = \dfrac{1-\operatorname{sen}2x}{1+\operatorname{sen}2x}$ //

D //

(11)



LEI DOS SENOS EM ABC → $\dfrac{BC}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{AC}{\operatorname{sen}\beta}$

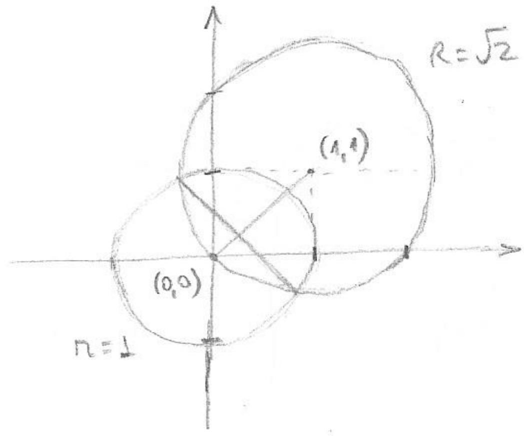
LEI DOS SENOS EM ACD → $\dfrac{CD}{\operatorname{sen}\gamma} = \dfrac{AC}{\operatorname{sen}\delta}$

COMO $BC = CD$

$\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{CD}{AC} \therefore \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\delta}$ //

A //

(12)



JÁ DÁ PARA VER QUE NÃO PASSA PELA ORIGEM //

MAS VAMOS FAZER AS CONTAS

$x^2 + y^2 = 1$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 2$

$1 - 2x + 1 - 2y + 1 = 2 \quad \therefore 2x + 2y - 1 = 0$

$y = -x + \frac{1}{2} \quad \therefore$ SE $x = 0,\ y = \frac{1}{2} \to$ OK

ALÉM DISSO, O m DA RETA É -1

COMO O m' DA RETA QUE PASSA PELOS CENTROS DAS CIRCUNFERÊNCIAS É 1, TEMOS $m = -\dfrac{1}{m'}$

LOGO AS RETAS SÃO PERPENDICULARES

B //

(13) $P(x) = x^3(3x^3 - 8x^2 + 3x + 2)$

$\uparrow$ Ø É RAIZ TRIPLA

$\uparrow$ 1 É RAIZ

VAMOS ABAIXAR DO 3º PARA O 2º GRAU

BRIOT-RUFFINI

	3	−8	3	2
1	3	−5	−2	0

$3x^2 - 5x - 2 = 0 \quad \therefore x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 3\cdot(-2)}}{6}$

$x = \dfrac{5 \pm 7}{6}$ ↗ 2 ↘ $-\frac{1}{3}$

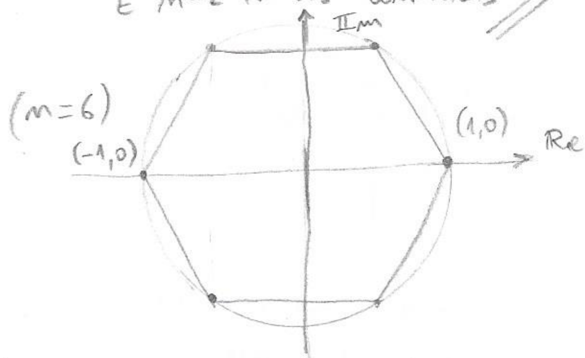
5 INTEIROS E 1 RACIONAL

MAS TODO INTEIRO É RACIONAL → TODOS RACIONAIS //

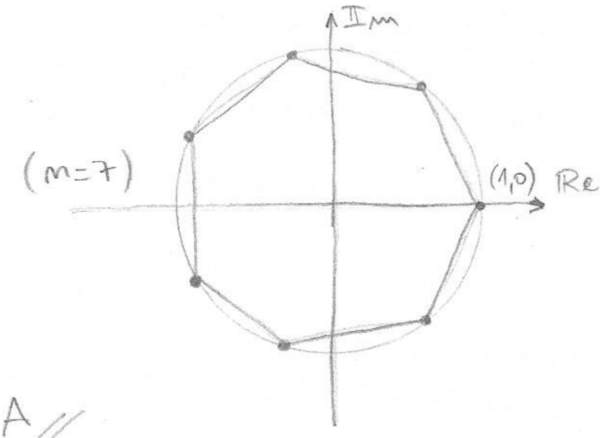
C //

(14) $x^m - 1 = 0$

m PAR → 1 RAIZ POSITIVA (1), 1 RAIZ NEGATIVA (−1)
E m−2 RAÍZES COMPLEXAS //



m ÍMPAR → 1 RAIZ POSITIVA (1) E N−1 RAÍZES
COMPLEXAS



A //

(15) $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 4$

SEJA $y = x + \frac{1}{x} \therefore y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

$y^2 - 2 + y = 4 \therefore y^2 + y - 6 = 0 \therefore$ SOMA $= -1$, PRODUTO $= -6$

$y_1 = -3$ e $y_2 = 2$

1º CASO: $x + \frac{1}{x} = -3 \therefore x^2 + 3x + 1 = 0$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

2º CASO: $x + \frac{1}{x} = 2 \therefore x^2 - 2x + 1 = 0$

1 É RAIZ DUPLA

SOMA DAS DUAS MENORES RAÍZES

$\frac{-3-\sqrt{5}}{2} + \frac{-3+\sqrt{5}}{2} = -3 \rightarrow$ VALOR ABSOLUTO $= 3$ //

B //

(16) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} =$

$= \frac{bc + ac + ab}{abc} = \frac{3}{4}$ //

C //

(17) $\log(\log(u))$

$u > 0$ PARA QUE $\log(u)$ EXISTA

$\log(u) > 0$ PARA QUE $\log(\log(u))$ EXISTA

$u > 1 \rightarrow$ PREDOMINA

$\frac{7 - 2x - x^2}{3 - 4x^2} > 1 \therefore \frac{7 - 2x - x^2}{3 - 4x^2} - 1 > 0$

$\frac{7 - 2x - x^2 - 3 + 4x^2}{3 - 4x^2} > 0 \therefore \frac{3x^2 - 2x + 4}{3 - 4x^2} > 0$

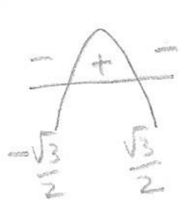
RAÍZES DO NUMERADOR

$\Delta = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 4 - 48 = -44 < 0$

NUMERADOR SEMPRE POSITIVO

RAÍZES DO DENOMINADOR

$4x^2 = 3 \therefore x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$



$-\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ //

N.D.R.A. //

E //

ITA – MAT – 1974

BOTELHO

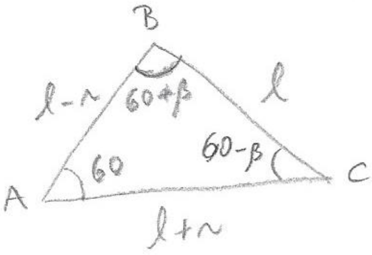
(continuação)

(18) OS VALORES DOS ÂNGULOS E DOS LADOS FORMAM 2 PAs.

ÂNGULOS $\alpha-\beta$, α E $\alpha+\beta$

$\alpha-\beta+\alpha+\alpha+\beta = 180^\circ \therefore \alpha = 60^\circ$

LADOS $l-r$, l E $l+r$



LEI DOS SENOS

$$\frac{l}{\text{sen}\,60} = \frac{l+r}{\text{sen}(60+\beta)} = \frac{l-r}{\text{sen}(60-\beta)}$$

$$l\,\text{sen}(60+\beta) = (l+r)\,\text{sen}\,60$$
$$l\,\text{sen}(60-\beta) = (l-r)\,\text{sen}\,60$$

$$l\,\text{sen}\,60\cos\beta + l\,\text{sen}\,\beta\cos 60 = (l+r)\,\text{sen}\,60 \quad +$$
$$l\,\text{sen}\,60\cos\beta - l\,\text{sen}\,\beta\cos 60 = (l-r)\,\text{sen}\,60$$

$$2l\,\text{sen}\,60\cos\beta = 2l\,\text{sen}\,60$$

$\cos\beta = 1 \therefore \beta = 0 \therefore$ TRIÂNGULO EQUILÁTERO

$$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2$$

D

(19) $a_1 = \log 123478$

$100\,000 < 123\,478 < 1\,000\,000$

$10^5 < 123\,478 < 10^6$

$\log 10^5 < \log 123478 < \log 10^6$

$5 < a_1 < 6$

$a_2 = \log a_1$

$\log 5 < \log a_1 < \log 6$

SABEMOS QUE $\log 2 \sim 0{,}3$ E $\sqrt{10} \sim 3{,}16$

$\log 5 = \log 10 - \log 2 \sim 1 - 0{,}3 \sim 0{,}7$

$\log 3 < \log 3{,}16 \sim \log\sqrt{10} = 0{,}5$

$\log 6 = \log 3 + \log 2 \sim 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$

$0{,}7 < a_2 < 0{,}8$

$$\underbrace{\log 0{,}7}_{<0} < \underbrace{\log a_2}_{a_3} < \underbrace{\log 0{,}8}_{<0}$$

$a_4 = \log a_3$ NÃO EXISTE PORQUE $a_3 < 0$

$m_{MAX} = 3$

A

(20) $M = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2}$

$(ab+ac+bc)^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2 =$

$= a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a+b+c)$

GIRARD $\rightarrow$ $a+b+c = \sqrt{3}$

$ab+ac+bc = 0$

$abc = -54$

$M = \frac{(ab+ac+bc)^2 - 2abc(a+b+c)}{(abc)^2} =$

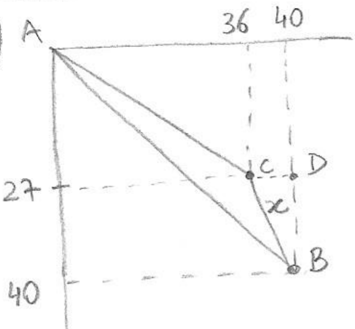
$= \frac{0 - 2\cdot(-54)\cdot\sqrt{3}}{(-54)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{54} = \frac{\sqrt{3}}{27} =$

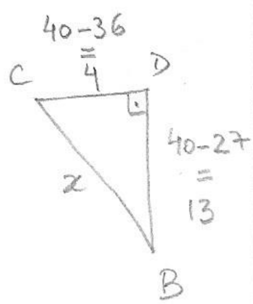
$= \frac{3^{1/2}}{3^3} = 3^{\frac{1}{2}-3} = 3^{-\frac{5}{2}}$

$\log_3 M = \log_3 3^{-5/2} = -\frac{5}{2}$

D

(21)





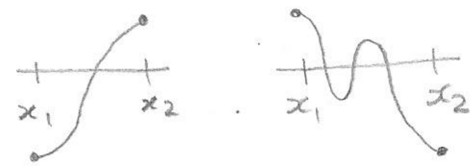
$x^2 = 4^2 + 13^2 = 16 + 169 = 185$

$x = \sqrt{185}$ Km

D

(22) BOLZANO

SE $f(x_1)\cdot f(x_2) < 0$, HÁ UM Nº ÍMPAR DE ZEROS ENTRE x_1 E x_2



1 ZERO   3 ZEROS

SE $f(x)$ É POLINÔMIO DE 3º GRAU, SÓ PODE HAVER UM OU TRÊS ZEROS

$f(1)\cdot f(2) < 0$

$f(1) = 1-2+3-k = 2-k$

$f(2) = 8-8+6-k = 6-k$

$(2-k)(6-k) < 0$

		2		6	
P_1	+	o	−		−
P_2	+		+	o	−
P	+	o	−	o	+

$2 < k < 6$

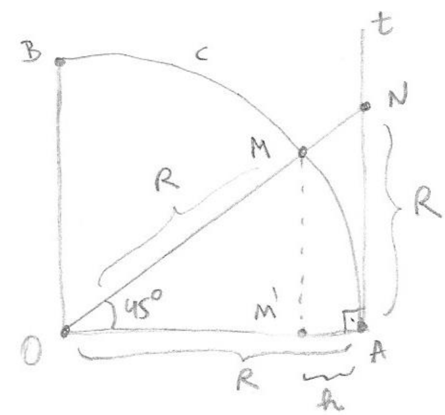
N.D.R.A.

E

ITA - MAT - 1974

BOTELHO.
(continuação)

(23)



$$K = \frac{V_{\text{ÂNGULO SÓLIDO OAM}}}{V_{\text{CONE OAN}}} < 1$$

$$V_{\text{CONE OAN}} = \frac{\pi \cdot AN^2 \cdot OA}{3} = \frac{\pi R^3}{3}$$

$$\text{ÂNGULO SÓLIDO} = \frac{\text{ÁREA CALOTA}}{R^2} = \frac{2\pi R h}{R^2}$$

ÂNGULO SÓLIDO —— $V_{\text{ÂNGULO SÓLIDO}}$

$4\pi (sr)$ —— V_{ESFERA}

$$V_{\text{ÂNGULO SÓLIDO}} = \frac{\text{ÂNGULO SÓLIDO} \cdot V_{\text{ESFERA}}}{4\pi}$$

$$V_{\text{ÂNGULO SÓLIDO}} = \frac{2\pi R h}{R^2} \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2\pi R^2 h}{3}$$

$$h = R - R\cos 45° = R - \frac{R\sqrt{2}}{2} = R\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$V_{\text{ÂNGULO SÓLIDO}} = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot R\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi R^3}{3}(2-\sqrt{2})$$

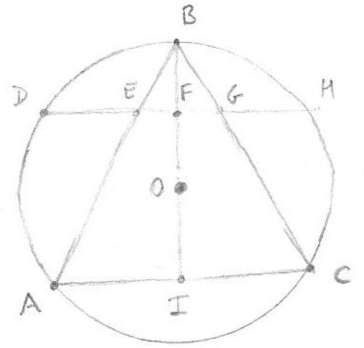
$$K = \frac{\frac{\pi R^3}{3}(2-\sqrt{2})}{\frac{\pi R^3}{3}} = 2-\sqrt{2} \sim 2 - 1,4 = 0,6$$

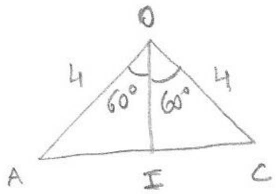
$0 < K \leq 2$

$0 < K < 1,5$

C, D //

(24)





$AI = CI = 4 \operatorname{sen} 60 = 2\sqrt{3}$

$S_{\text{BASE CONE}} = \pi \cdot AI^2 = 12\pi$

$S_{\text{SEÇÃO DH}} = \pi \cdot DF^2$ $\quad EF = ?$

$S_{\text{SEÇÃO EG}} = \pi \cdot EF^2$

$\pi \cdot DF^2 - \pi \cdot EF^2 = 12\pi \quad \therefore \quad DF^2 - EF^2 = 12$

$\triangle$ BEG É EQUILÁTERO $\therefore BF = \frac{EG\sqrt{3}}{2} = \frac{2EF\sqrt{3}}{2}$

$BF = EF\sqrt{3} \quad \therefore \quad OF = OB - BF = 4 - EF\sqrt{3}$

$OD^2 = DF^2 + OF^2 \quad \therefore \quad 16 = DF^2 + 16 - 8\sqrt{3}EF + 3EF^2$

$0 = EF^2 + 12 - 8\sqrt{3}EF + 3EF^2$

$EF^2 - 2\sqrt{3}EF + 3 = 0 \quad \therefore \quad EF = \sqrt{3}$ //

B //

(25) $(z+1)^5 + z^5 = 0$

VER 6ª QUESTÃO DE IME 88/89

$z = a + bi$

$(a+1+bi)^5 + (a+bi)^5 = 0$

$(a+1+bi)^5 = -(a+bi)^5$

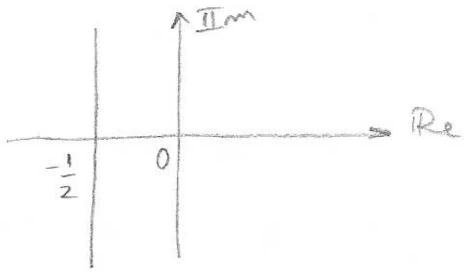
$|a+1+bi| = |a+bi|$

$(a+1)^2 + b^2 = a^2 + b^2$

$a^2 + 2a + 1 + b^2 = a^2 + b^2$

$2a + 1 = 0 \therefore a = -\frac{1}{2}$

$\operatorname{Re}(z_k) = -\frac{1}{2}$



TODOS OS z_k ESTÃO SOBRE UMA RETA PARALELA AO EIXO IMAGINÁRIO //

C //