MINISTÉRIO DA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE PESQUISAS E DESENVOLVIMENTO
CENTRO TÉCNICO AEROESPACIAL
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

# CONCURSO DE ADMISSÃO - 1972

## EXAME DE MATEMÁTICA

### *INSTRUÇÕES*

1. A duração da prova é de 4 horas .
2. A prova de Matemática consta de 25 questões de Múltipla Escôlha .
3. Só há uma resposta certa em cada questão.
4. NÃO DEIXE DE RESPONDER NENHUMA QUESTÃO. QUANDO EM DÚVIDA, ASSINALE A RESPOSTA QUE LHE PARECER MAIS CORRETA .
5. Questões não respondidas ocasionam rejeição do cartão pelo computador, podendo prejudicar o candidato .
6. Não escreva no caderno de questões .
7. Assinale com um traço curto e forte de lápis o espaço correspondente a cada questão, na fôlha de respostas .
8. Verificando algum engano nas respostas poderá corrigí-lo usando borracha .
9. Observe cuidadosamente o número das questões ao respondê-las .
10. O agente fiscal fornecerá papel para rascunho, o qual não será considerado na correção da prova .
11. Não será permitido o uso de tabelas, régua de cálculo, apontamentos, formulá - rios e outros papéis a não ser os fornecidos pelo fiscal.
12. O caderno de questões contém 8 páginas numeradas de 2 a 9 .
13. log m significa logarítmo de m na base e; u.a. significa unidades de área .
14. Lidas estas instruções e preenchido o cabeçalho da fôlha de respostas aguarde a ordem do fiscal para o início do exame .

1 - O ângulo convexo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos às 10 horas e 15 minutos é :

a) $142^{\circ}\ 30'$

b) $142^{\circ}\ 40'$

c) $142^{\circ}$

d) $141^{\circ}\ 30'$

e) nenhuma das respostas anteriores

2 - Tôdas as raizes reais da equação $\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x}} - \sqrt{\dfrac{x}{x^2+3}} = \dfrac{3}{2}$ são :

a) $x_1 = 3$ e $x_2 = -3$

b) $x_1 = 3$ e $x_2 = 3$

c) $x_1 = 3$ e $x_2 = \sqrt{3}$

d) não tem raizes reais

e) nenhuma das respostas anteriores

3 - Tôdas as raizes reais da equação $x^{-1} - 4x^{-\frac{1}{2}} + 3 = 0$ são :

a) $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$

b) $x_1 = \frac{1}{3}$ e $x_2 = \frac{1}{3}$

c) $x_1 = 3$ e $x_2 = 3$

d) não tem raizes reais

e) nenhuma das respostas anteriores

4 - Qual é a relação que a,b e c devem satisfazer tal que o sistema abaixo tenha pelo menos uma solução ?

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

a) $5a = 2b - c$

b) $5a = 2b + c$

c) $5a \neq 2b + c$

d) não existe relação entre a,b,c

e) nenhuma das respostas anteriores .

5 - Assinale a sentença correta

a) $a > 1$ $\log_a x < 0$ se $x > 1$, $\log_a x > 0$ se $x < 1$

b) $0 < a < 1$ $\log_a x > 0$ se $x < 1$, $\log_a x < 0$ se $x > 1$

c) $a > 1$ $\log_a x_1 < \log_a x_2$ se e só se $x_1 > x_2$

d) $0 < a < 1$ $\log_a x_1 > \log_a x_2$ se e só se $x_1 < x_2$

e) nenhuma das respostas anteriores

6 - Assinale uma solução para a equação trigonométrica $\sqrt{3}$ sen $x$ + cos $x = \sqrt{3}$

a) $x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$

b) $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$

c) $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

d) $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

e) nenhuma das respostas anteriores

7 - Qual é o valor de m para que

$$\frac{C_m^3}{C_{m-1}^3} = \frac{7}{4} \quad ?$$

a) $m = 8$

b) $m = 10$

c) $m = 6$

d) $m = 5$

e) nenhuma das respostas anteriores

8 - Consideremos duas retas $r_1$ e $r_2$ ortogonais não situadas num mesmo plano, e um segmento XY de comprimento constante que desliza por suas extremidades sôbre essas retas .

O lugar geométrico, das intersecções dos planos construídos perpendicularmente a essas retas $r_1$ e $r_2$ nas extremidades do segmento XY, é :

a) uma reta perpendicular ao segmento XY

b) a superfície cilíndrica de revolução tendo como diretriz a parábola .

c) a superfície cilíndrica de revolução tendo como diretriz a elipse

d) a superfície cilíndrica de revolução tendo como diretriz a hipérbole

e) nenhuma das respostas anteriores ,

9 - Dado um cilindro de revolução de raio r e altura h ; sabe-se que a média harmônica entre o raio r e a altura é 4 e que sua área total é $2\pi$ u.a.
O raio r deve satisfazer a relação :

a) $r^3 - r + 2 = 0$

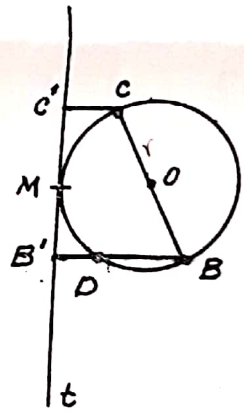
b) $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$

c) $r^3 - r^2 - r + 1 = 0$

d) $r^3 - 3r - 2 = 0$

e) nenhuma das respostas anteriores

10- Seja $\overrightarrow{B'C'}$ a projeção do diâmetro $\overline{BC}$ de um círculo de raio r sôbre a reta tangente t por um ponto M dêste círculo .
Seja 2 k a razão da área total do tronco do cone gerado pela rotação do trapézio BC B'C' ao redor da reta tangente t e a área do círculo dado .
Qual é o valor de k para que a medida do segmento $\overline{MB'}$ seja igual a metade do raio r ?




a) $k = \frac{11}{3}$

b) $k = \frac{15}{4}$

c) $k = 2$

d) $k = \frac{1}{2}$

e) nenhuma das respostas anteriores

11- Seja a equação

$$3^{(\log x)+1} - 3^{(\log x)-1} + 3^{(\log x)-3} - 3^{(\log x)-4} = \log \frac{\text{sen } a}{e^{-657}}$$

Sabe-se que logx é igual a maior raiz da equação $r^2 - 4r - 5 = 0$ .
O valor de a para que a equação seja verificada é :

a) $a = \frac{3\pi}{2}$

b) $a = \text{arc sen } \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $a = \text{arcsen } \frac{1}{e^3}$

d) $a = \text{arcsen}(e)$

e) nenhuma das respostas anteriores

12- Quais os valores de $\alpha$ de modo que o sistema

$$\begin{cases} (\operatorname{sen}\alpha - 1)x + 2y - (\operatorname{sen}\alpha)z = 0 \\ (3 \operatorname{sen}\alpha)y + 4z = 0 \\ 3x + (7 \operatorname{sen}\alpha)y + 6z = 0 \end{cases}$$

admite soluções não triviais ?

a) $\alpha = n\pi$ , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

b) $\alpha = n\pi + \frac{\pi}{3}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

c) $\alpha = n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

d) não há valores de $\alpha$ .

e) nenhuma das respostas anteriores

13- As dimensões de um paralelepípedo retângulo estão em progressão geométrica e a sua soma vale s. Sabendo-se que o seu volume é $v^3$ e $s \geq 3v$ , então duas de suas dimensões são :

a) $\dfrac{s + v \pm \sqrt{(s+v)^2 - v^2}}{2}$

b) $s - v$ e $s + v$

c) $v \pm \sqrt{(s-v)^2 - 4v^2}$

d) $\dfrac{s - v \pm \sqrt{(s-v)^2 - 4v^2}}{2}$

e) nenhuma das respostas anteriores

14- Construindo-se um prisma e uma pirâmide sôbre uma mesma base de área A e de volumes $V_1$ e $V_2$, a área da secção da pirâmide com a outra base do prisma é :

a) $A \dfrac{V_1}{V_1 + V_2}$

b) $\dfrac{V_2 - V_1}{A V_2}$

c) $A \left(1 - \dfrac{V_1}{3 V_2}\right)$

d) $A \dfrac{3 V_2 - V_1}{V_2}$

e) nenhuma das respostas anteriores

15- Para todo $\alpha$ e $\beta$ , $|\beta| < 1$ , a expressão $tg(\text{arctg}\,\alpha + \text{arcsen}\,\beta)$ é igual a :

a) $-\dfrac{\beta + \alpha\sqrt{1-\beta^2}}{\alpha\beta - \sqrt{1-\beta^2}}$

b) $\dfrac{\alpha - \beta}{\alpha\beta + \sqrt{1-\beta^2}}$

c) $\dfrac{\alpha + \beta}{\alpha\beta \sqrt{\beta^2 - 1} - 1}$

d) $\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}(\alpha - \beta)}{\alpha\beta - 1}$

e) nenhuma das respostas anteriores

16- A soma dos quadrados das raizes da equação

$2x^3 - 8x^2 - 60x + k = 0$ ( k constante )

é :

a) $76 + k^2$

b) $(34 + k)^2$

c) 66

d) 76

e) nenhuma das respostas anteriores

17- Seja $f(x) = x^2 + px + p$ uma função real de variável real. Os valôres de p para os quais $f(x) = 0$ possue raiz dupla positiva, são

a) $0 < p < 4$

b) $p = 4$

c) $p = 0$

d) $f(x) = 0$ não pode ter raiz dupla positiva

e) nenhuma das respostas anteriores .

18- O volume do sólido gerado por um triângulo, que gira em tôrno de sua hipotenusa cujos catetos são 15 cm e 20 cm, é

a) $1080\pi\ cm^3$

b) $960\ cm^3$

c) $1400\ cm^3$

d) $1600\pi\ cm^3$

e) nenhuma das respostas anteriores

19- Seja a equação

$$3\ tg\ 3x = \left[3(\log k)^2 - 4\log k + 2\right]\ tgx\ .$$

Para que intervalo de valores de k, abaixo, a equação dada *admite solução ?*

a) $0 < k \leq e^{\frac{1}{3}}$

b) $0 < k \leq e^{\frac{2}{3}}$

c) $0 < k \leq e^{-1}$

d) $0 < k \leq e^{\frac{7}{3}}$

e) nenhuma das respostas anteriores

20- Seja a equação $P(x) = 0$, onde $P(x)$ é um polinômio de grau $\underline{m}$ . Se $P(x)$ admite uma raiz inteira, então $P(-1).P(0).P(1)$ necessàriamente

a) vale 5

b) vale 3

c) é divisível por 5

d) é divisível por 3

e) nenhuma das respostas anteriores

21- Sejam A um conjunto finito com $\underline{m}$ elementos e $I_n = \{1,2,\ldots,n\}$. O número de tôdas as funções definidas em $I_n$ com valôres em A é :

a) $C_m^n$

b) m.n

c) $n^m$

d) $m^n$

e) nenhuma das respostas anteriores

22- Sejam $m \leq n$, $I_m = \{1,2,\ldots,m\}$ e $I_n = \{1,2,\ldots,n\}$.
O número de funções biunívocas definidas em $I_m$ com valôres em $I_n$ é :

a) $A_m^n$

b) $C_m^n$

c) $\dfrac{m!}{n!}$

d) m.n

e) nenhuma das respostas anteriores

23- Seja $\theta = \text{arc sen } \dfrac{b}{a}$, com $|a| > |b|$. Então $2\theta$ vale :

a) $2\theta = \text{arc}(2 \text{ sen} \dfrac{b}{a})$

b) $2\theta = \text{arc sen } \dfrac{2b}{a}$

c) $2\theta = \text{arc sen } \left(2 \dfrac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right)$

d) $2\theta = \text{arc sen } \left(2 \dfrac{b}{a^2} \sqrt{a^2 - b^2}\right)$

e) nenhuma das respostas anteriores .

24- Quais condições devem satisfazer a e k para que a seguinte igualdade tenha sentido ?

$$\log(\sec a) = k$$

a) $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ , $k \geq 0$

b) $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ , $k < 0$

c) $-\frac{\pi}{2} < a \leq \frac{\pi}{2}$ , $k > 0$

d) $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}$ $k \geq 0$

e) nenhuma das respostas anteriores

25- Consideremos a função $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\text{sen}x)^n$ , onde $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . Para que valores de x

$$10 \leq S(x) \leq 20 \ ?$$

a) $\text{arc sen} \frac{9}{10} \leq x \leq \text{arc sen} \frac{19}{20}$

b) $\text{arc sen} \frac{10}{9} \leq x \leq \text{arc sen} \frac{20}{19}$

c) $\text{arc sen} \frac{10}{11} \leq x \leq \text{arc sen} \frac{20}{21}$

d) $\text{arc sen} \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \text{arc sen} \frac{\sqrt{3}}{2}$

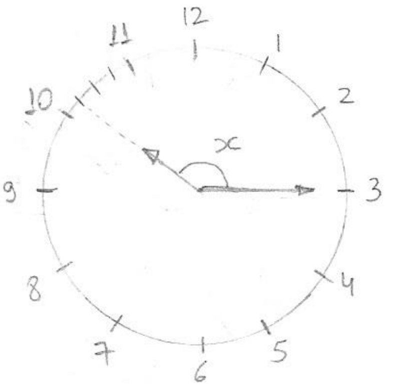
e) nenhuma das respostas anteriores .

Scanned by CamScanner

# ITA - MAT - 1972

BOTELHO

(1)




CADA DIVISÃO DAS HORAS $= \frac{360°}{12} = 30°$

DE 11h A 3h → 4 DIVISÕES $= 120°$

DE 10h A 11h → 1 DIVISÃO $= 30°$

ÀS 10h 15 MIN → $\frac{1}{4}$ DIVISÃO $= 7°30'$

$30° - 7°30' = 22°30'$

$x = 120° + 22°30' = 142°30'$

A

(2) $\sqrt{\frac{x^2+3}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x^2+3}} = \frac{3}{2}$

$y = \sqrt{\frac{x^2+3}{x}} \therefore y - \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \therefore \frac{y^2-1}{y} = \frac{3}{2}$

$2y^2 - 2 = 3y \therefore 2y^2 - 3y - 2 = 0$

$y = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$ ↗ $2$ ✓ ↘ $-\frac{1}{2}$ ✗

$\sqrt{\frac{x^2+3}{x}} = 2 \therefore \frac{x^2+3}{x} = 4 \therefore x^2 - 4x + 3 = 0$

SOMA = 4 ∴ PRODUTO = 3 ∴ $x_1 = 3$ E $x_2 = 1$

NENHUMA DAS RESPOSTAS ANTERIORES

E

(3) $x^{-1} - 4x^{-\frac{1}{2}} + 3 = 0$

$y = x^{-\frac{1}{2}} \therefore y^2 = x^{-1}$

$y^2 - 4y + 3 = 0 \therefore y_1 = 3$ E $y_2 = 1$

$x_1^{-\frac{1}{2}} = 3 \therefore \frac{1}{\sqrt{x_1}} = 3 \therefore x_1 = \frac{1}{9}$

$x_2^{-\frac{1}{2}} = 1 \therefore \frac{1}{\sqrt{x_2}} = 1 \therefore x_2 = 1$

NENHUMA DAS RESPOSTAS ANTERIORES

E

(4) $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 6 & b \\ 1 & -2 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{6c - 4a + 2b + 2b - 6a - 4c}{42 + 12 - 22 + 18 - 22 - 28}$$

$$z = \frac{-10a + 4b + 2c}{72 - 72} = \frac{-10a + 4b + 2c}{0}$$

SE $-10a + 4b + 2c \neq 0$ → SISTEMA IMPOSSÍVEL

SE $-10a + 4b + 2c = 0$ → SISTEMA INDETERMINADO

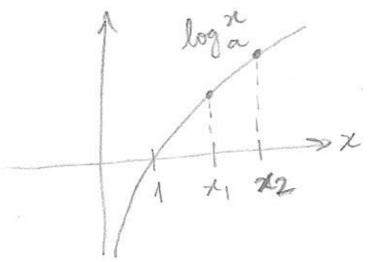
INFINITAS SOLUÇÕES

AO MENOS UMA SOLUÇÃO

$10a = 4b + 2c \therefore 5a = 2b + c$

B

(5)




$\underline{a>1}$

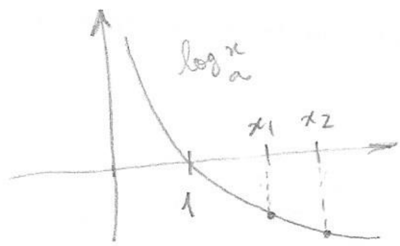
$\log_a^x > 0$ se $x>1$

$\log_a^x < 0$ se $\underline{\underline{0<x<1}}$

$\log_a^{x_1} < \log_a^{x_2}$ se e

só se $\underline{\underline{0<x_1<x_2}}$

$\underline{0<a<1}$




$\log_a^x > 0$ se $\underline{\underline{0<x<1}}$

$\log_a^x < 0$ se $x>1$

$\log_a^{x_1} > \log_a^{x_2}$ se

e só se $\underline{\underline{0<x_1<x_2}}$

NENHUMA ESTÁ TOTALMENTE CERTA //

E //

(6) $\sqrt{3}$ sen $x$ + cos $x = \sqrt{3}$

cos $x = \sqrt{3} - \sqrt{3}$ sen $x$

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\text{sen}^2 x + 3 - 2 \cdot 3 \cdot \text{sen}\, x + 3\,\text{sen}^2 x = 1$

$4\,\text{sen}^2 x - 6\,\text{sen}\, x + 2 = 0$

$2\,\text{sen}^2 x - 3\,\text{sen}\, x + 1 = 0$

$y = \text{sen}\, x \therefore 2y^2 - 3y + 1 = 0$

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{9-4\cdot 2\cdot 1}}{4} = \frac{3\pm 1}{4} \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \searrow \frac{1}{2} \end{array}$$

sen $x = 1 \therefore x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

sen $x = \frac{1}{2} \therefore x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad k \in \mathbb{Z} \leftarrow$

$x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad k \in \mathbb{Z}$

B //

(7) $$\frac{\binom{m}{3}}{\binom{m-1}{3}} = \frac{7}{4}$$

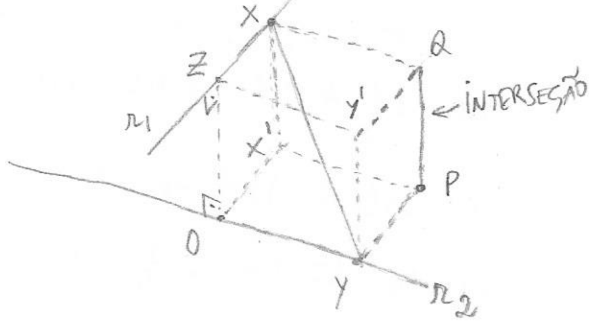
$$\frac{4\,m!}{(m-3)!\,3!} = \frac{7\,(m-1)!}{(m-1-3)!\,3!}$$

$$\frac{4\,m}{m-3} = 7 \quad \therefore 4m = 7m - 21$$

$3m = 21 \therefore m = 7$ //

E //

(8)




A INTERSEÇÃO É UMA RETA PQ PERPENDICULAR AOS PLANOS OX'PY E ZXQY'

A POSIÇÃO DO "PÉ" DA RETA NO PLANO OX'PY É P

SEJAM $OX' = x$, $OY = y$ E $OZ = z$

SE $r_1$ E $r_2$ SÃO RETAS DADAS, $OZ = z = CTE_1$

$$XY = \sqrt{OX'^2 + OY^2 + \underbrace{OZ^2}_{CTE_1^2}} = CTE_2$$

$OX'^2 + OY^2 = CTE\,3 = OP^2$

$P \in$ CIRCUNFERÊNCIA COM CENTRO EM O

O LG DA RETA PQ É UMA SUPERFÍCIE CILÍNDRICA DE REVOLUÇÃO TENDO COMO DIRETRIZ UMA CIRCUNFERÊNCIA

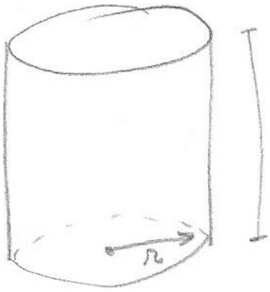
E //

# ITA – MAT – 1972

BOTELHO

(continuação)

(9)



MÉDIA HARMÔNICA $= \dfrac{2}{\frac{1}{r}+\frac{1}{h}} = \dfrac{2rh}{r+h} = 4$

ÁREA TOTAL $= 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi$

$rh + r^2 = 1 \therefore h = \dfrac{1-r^2}{r}$

$2rh = 4r + 4h \therefore 2r\left(\dfrac{1-r^2}{r}\right) = 4r + \dfrac{4-4r^2}{r}$

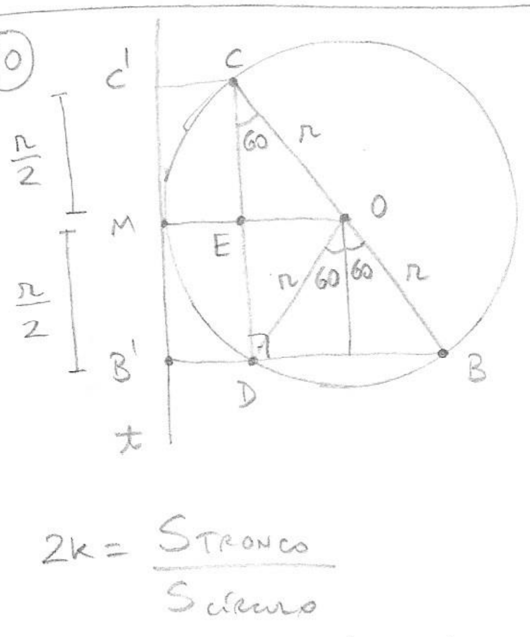
$2r - 2r^3 = 4r^2 + 4 - 4r^2$

$2r^3 - 2r + 4 = 0 \therefore r^3 - r + 2 = 0$

A

PLANCK → E(?)

(10)



$2k = \dfrac{S_{TRONCO}}{S_{CÍRCULO}}$

SE $MB' = r/2 \to C'M = r/2$

$D\hat{C}B = 60^\circ$

$S_{TRONCO} = \underbrace{\pi \cdot CC'^2}_{\text{BASE SUPERIOR}} + \underbrace{\pi \cdot BB'^2}_{\text{BASE INFERIOR}} + \underbrace{2\pi \cdot OM \cdot BC}_{\text{LATERAL (PAPPUS-GULDIN)}}$

$CC' = OM - OE = r - r\,\text{sen}\,60^\circ = r - \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$

$BB' = BD + CC' = 2r\,\text{sen}\,60^\circ + r - \dfrac{r\sqrt{3}}{2} =$

$= 2r\dfrac{\sqrt{3}}{2} + r - \dfrac{r\sqrt{3}}{2} = r + \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$

$S_{TRONCO} = \pi r^2\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \pi r^2\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2\pi \cdot r \cdot 2r =$

$= \pi r^2\left(1 - \dfrac{2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{4} + 1 + \dfrac{2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{4} + 4\right) =$

$= \pi r^2 \cdot \left(6 + \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{15}{2}\underbrace{\pi r^2}_{S_{CÍRCULO}}$

$2k = \dfrac{15}{2} \therefore k = \dfrac{15}{4}$

B

(11) $r^2 - 4r - 5 = 0 \therefore$ SOMA $= 4$ E PRODUTO $= -5$

$r_1 = 5$ E $r_2 = -1 \therefore \log x = \ln x = 5$

$3^{5+1} - 3^{5-1} + 3^{5-3} - 3^{5-4} = \log \dfrac{\text{sen}\,a}{e^{-657}}$

$3^6 - 3^4 + 3^2 - 3 = \log \dfrac{\text{sen}\,a}{e^{-657}}$

$3^4 = 81 \therefore 3^6 = 729$

$729 - 81 + 9 - 3 = 648 + 6 = 654$

$654 = \log \text{sen}\,a - \log e^{-657}$

$654 = \log \text{sen}\,a + 657$

$\log \text{sen}\,a = -3 \therefore \text{sen}\,a = e^{-3}$

$a = \text{arc sen}\left(\dfrac{1}{e^3}\right)$

C

PLANCK → E (CONSIDEROU ARCOS CÔNGRUOS)

(12)

$$\begin{cases} (\operatorname{sen}\alpha - 1)x + 2y - (\operatorname{sen}\alpha)z = 0 \\ (3\operatorname{sen}\alpha)y + 4z = 0 \\ 3x + (7\operatorname{sen}\alpha)y + 6z = 0 \end{cases}$$

O SISTEMA É HOMOGÊNEO (TERMOS INDEPENDENTES NULOS), ADMITINDO A SOLUÇÃO TRIVIAL (0,0,0)

PARA QUE HAJA OUTRAS SOLUÇÕES, O SISTEMA DEVE SER INDETERMINADO (INFINITAS SOLUÇÕES)

O DETERMINANTE DEVE SER ZERO

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha - 1 & 2 & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 3\operatorname{sen}\alpha & 4 \\ 3 & 7\operatorname{sen}\alpha & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 18\operatorname{sen}^2\alpha - 18\operatorname{sen}\alpha + 24 + 9\operatorname{sen}^2\alpha - 28\operatorname{sen}^2\alpha +$$
$$+ 28\operatorname{sen}\alpha = 0$$

$$-\operatorname{sen}^2\alpha + 10\operatorname{sen}\alpha + 24 = 0$$

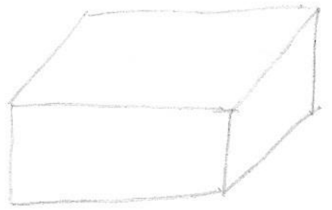
SOMA = 10 E PRODUTO = −24

$\operatorname{sen}\alpha = 12$ OU $\operatorname{sen}\alpha = -2$

NÃO HÁ VALORES DE $\alpha$ //

D //

(13)



DIMENSÕES $\frac{r}{q}, r, rq$ (PG)

VOLUME $= \frac{r}{q} \cdot r \cdot rq = r^3$

$s = \frac{r}{q} + r + rq \quad \therefore \quad sq = r + rq + rq^2$

$rq^2 + (r - s)q + r = 0$

$$q = \frac{s - r \pm \sqrt{(s-r)^2 - 4r^2}}{2r}$$

COMO $s \geq 3r \rightarrow \Delta \geq 0$

$$rq = \frac{s - r + \sqrt{(s-r)^2 - 4r^2}}{2}$$ (SUPONDO MAIOR)

$$\frac{r}{q} = s - r - rq = \frac{s - r - \sqrt{(s-r)^2 - 4r^2}}{2}$$

DUAS DIMENSÕES $\rightarrow \frac{s - r \pm \sqrt{(s-r)^2 - 4r^2}}{2}$ //

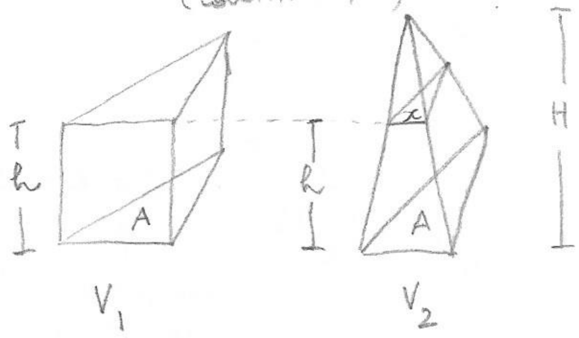
D //

# ITA - MAT - 1972

BOTEZINHO.

(continuação)

(14)




$V_1 = A \cdot h$ $\qquad V_2 = \frac{1}{3} A H$

$x$ = ÁREA DA SEÇÃO

$$\frac{x}{A} = \left(\frac{H-h}{H}\right)^2 = \left(1 - \frac{h}{H}\right)^2 = \left(1 - \frac{V_1/A}{3V_2/A}\right)^2$$

$$x = A\left(1 - \frac{V_1}{3V_2}\right)^2$$

E

(15) $tg(x+y) = \frac{tg\,x + tg\,y}{1 - tg\,x\,tg\,y}$

$x = \text{arc}\,tg\,\alpha \;\therefore\; tg\,x = \alpha$

$y = \text{arc}\,sen\,\beta \;\therefore\; sen\,y = \beta$

$\cos y = \sqrt{1-\beta^2} \;\therefore\; tg\,y = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\frac{\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}}{1 - \alpha\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{\beta + \alpha\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2} - \alpha\beta} =$$

$$= -\frac{\beta + \alpha\sqrt{1-\beta^2}}{\alpha\beta - \sqrt{1-\beta^2}}$$

A

(16) RAÍZES $x_1, x_2, x_3$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) =$$

$$= \left(\frac{8}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(-\frac{60}{2}\right) = 16 + 60 = 76$$

D

(17) RAIZ DUPLA POSITIVA $x_1, x_1 > 0$

$x_1 + x_1 = -p \;\therefore\; x_1 \cdot x_1 = p$

$2x_1 = -p \;\therefore\; x_1^2 = p$

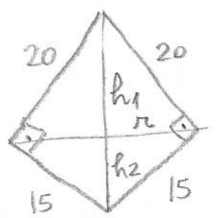
$x_1^2 = -2x_1 \;\therefore\; x_1 = 0$ OU $x_1 = -2$

NÃO NÃO

$f(x) = 0$ NÃO PODE TER RAIZ DUPLA POSITIVA

D

(18)




DOIS CONES

$$V = \frac{\pi r^2 h_1}{3} + \frac{\pi r^2 h_2}{3}$$

$$V = \frac{\pi r^2 (h_1 + h_2)}{3} \;\therefore\; \cdot 5 \; \begin{matrix} 3 - 4 - 5 \\ 15 - 20 - \underbrace{25}_{h_1+h_2} \end{matrix}$$

$$r = \frac{20 \cdot 15}{25} = 4 \cdot 3 = 12$$

$$V = \frac{\pi \cdot 144 \cdot 25}{3} = \pi \cdot 48 \cdot 25 = \frac{\pi \cdot 48 \cdot 100}{4} =$$

$$= 1200\pi \text{ cm}^3$$

E

(19) $tg\,2x = \frac{2\,tg\,x}{1-tg^2x}$

$tg\,3x = tg(2x+x) = \frac{tg\,2x + tg\,x}{1 - tg\,2x \cdot tg\,x} =$

$= \frac{\frac{2\,tg\,x}{1-tg^2x} + tg\,x}{1 - \frac{2\,tg\,x}{1-tg^2x}\,tg\,x} = \frac{2\,tg\,x + tg\,x - tg^3x}{1 - tg^2x - 2\,tg^2x} =$

$= \frac{3\,tg\,x - tg^3x}{1 - 3\,tg^2x} = \frac{tg\,x\,(3 - tg^2x)}{1 - 3\,tg^2x}$

$3\,\frac{tg\,x\,(3 - tg^2x)}{1 - 3\,tg^2x} = \left[3(\log k)^2 - 4\log k + 2\right] tg\,x$

$tg\,x = 0$ É SOLUÇÃO PARA TODO K...

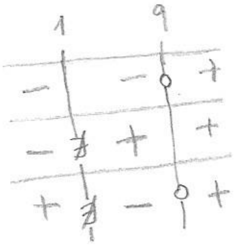
$tg\,x \neq 0$

SEJA $s = 3(\log k)^2 - 4\log k + 2$

$\frac{9 - 3\,tg^2x}{1 - 3\,tg^2x} = s \therefore 9 - 3\,tg^2x = s - 3s\,tg^2x$

$(3s-3)\,tg^2x = s - 9 \quad \therefore tg^2x = \frac{s-9}{3s-3}$

$\frac{s-9}{3s-3} \geq 0$



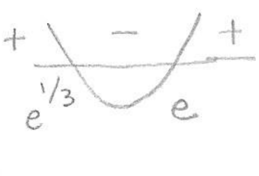

$s < 1$ ou $s \geq 9$

$s < 1 \rightarrow 3(\log k)^2 - 4\log k + 2 < 1$

$3(\log k)^2 - 4\log k + 1 < 0$

$\log k = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 3}}{6} \rightarrow 1,\ 1/3$

$\log k = \ln k$ (CAPA)

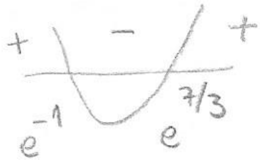



$e^{1/3} < k < e$

$s \geq 9 \rightarrow 3(\log k)^2 - 4\log k + 2 \geq 9$

$3(\log k)^2 - 4\log k - 7 \geq 0$

$\log k = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 3\cdot(-7)}}{6} \rightarrow -1,\ \frac{7}{3}$




$0 < k \leq e^{-1}$

↑ CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE $\log k$

OU $k \geq e^{7/3}$

DOS 3 INTERVALOS, TEMOS UMA OPÇÃO COM

$0 < k \leq e^{-1}$

C

RESSALVA → $tg\,x = 0$ É SOLUÇÃO PARA TODO K...

(20) SEJA $r$ A RAIZ INTEIRA

$P(x) = (x-r)(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_{m-1})$

$P(-1) = (-1-r)\ldots$

$P(0) = (0-r)\ldots$

$P(1) = (1-r)\ldots$

$P(-1)\,P(0)\,P(1) = \underbrace{(-1-r)(0-r)(1-r)}_{\text{3 INTEIROS CONSECUTIVOS}}\ldots$

UM DELES É MÚLTIPLO DE 3

SERIA DIVISÍVEL POR 3

D (PLANCK E BAHIENSE)

MAS E SE $(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_{m-1})$ FOR RACIONAL COM DENOMINADOR MÚLTIPLO DE 3?

CONTRAEXEMPLO: $m=2 \therefore (x+4)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

$P(-1) = 3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -2 \quad \therefore P(0) = \frac{4}{3}$

$P(1) = 5\cdot\frac{4}{3} = \frac{20}{3} \quad \therefore$ PRODUTO $= -\frac{160}{9}$

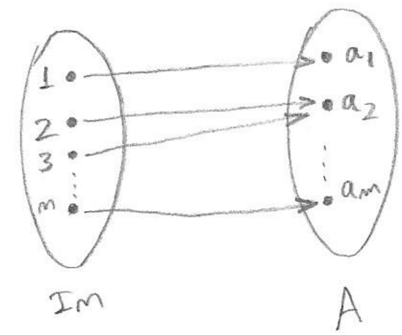
NRA E

## ITA - MAT - 1972

BOTELHO

(continuação)

### 21




O QUE NÃO PODE É SAIR MAIS DE UMA FLECHA DO MESMO ELEMENTO DE Im

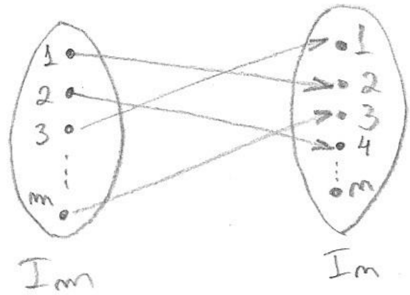
MAS DUAS FLECHAS PODEM CHEGAR AO MESMO ELEMENTO DE A

PARA CADA ELEMENTO DE Im, POSSO ESCOLHER m ELEMENTOS DE A. COMO Im TEM m ELEMENTOS:

$$\underbrace{m \cdot m \cdot \ldots m}_{m \text{ VEZES}} = m^m$$

D

### 22




AS FUNÇÕES BIUNÍVOCAS OU BIJETORAS SÃO INJETORAS E SOBREJETORAS AO MESMO TEMPO

COMO $m \leq m$, NOS CASOS EM QUE $m < m$, NÃO HÁ FUNÇÕES INJETORAS E SOBREJETORAS AO MESMO TEMPO (SOBRAM $m - m$ ELEMENTOS EM Im NA CORRESPONDÊNCIA BIUNÍVOCA)

NRA  E

### 23

$$\theta = \text{arc sen} \frac{b}{a}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{a} \therefore \cos\theta = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$$\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = 2\frac{b}{a^2}\sqrt{a^2-b^2}$$

$$2\theta = \text{arc sen}\left(2\frac{b}{a^2}\sqrt{a^2-b^2}\right)$$

D

PLANCK → E (CONSIDERA ARCOS CÔNGRUOS)

### 24

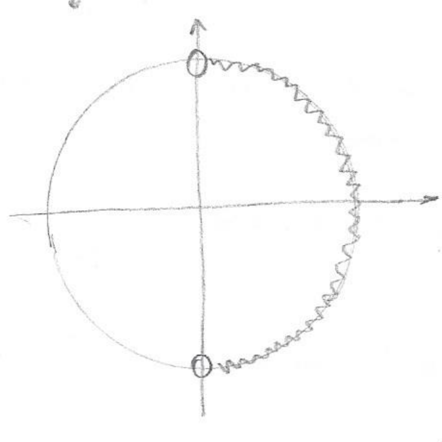
$$\log(\sec a) = K$$

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE log:

$$\sec a > 0 \therefore \frac{1}{\cos a} > 0 \therefore \cos a > 0$$

ENTÃO $0 < \cos a \leq 1 \therefore$

$\log x = \ln x$ (CAPA DA PROVA)



$$-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$$

$\cos a = 0^+ \therefore \sec a \to \infty^+ \therefore K \to \infty^+$

$\cos a = 1 \therefore \sec a = 1 \therefore K = 0$

$K \geq 0$

A

PLANCK → E (CONSIDERA ARCOS CÔNGRUOS)

25 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\text{sen}\, x)^n = \text{sen}\, x + \text{sen}^2 x + \ldots$

$0 < x < \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 < \text{sen}\, x < 1$

É UMA PG INFINITA DE RAZÃO < 1

$S(x) = \dfrac{a_1}{1-q}$

$a_1 = \text{sen}\, x \therefore q = \text{sen}\, x$

$S(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{1 - \text{sen}\, x}$

$S(x) = 10 = \dfrac{\text{sen}\, x}{1 - \text{sen}\, x} \therefore 10 - 10\,\text{sen}\, x = \text{sen}\, x$

$10 = 11\, \text{sen}\, x \therefore x = \text{arc sen}\, \frac{10}{11}$

$S(x) = 20 = \dfrac{\text{sen}\, x}{1 - \text{sen}\, x} \therefore 20 - 20\, \text{sen}\, x = \text{sen}\, x$

$20 = 21\, \text{sen}\, x \therefore x = \text{arc sen}\, \frac{20}{21}$

SE $x \uparrow$, $\text{sen}\, x \uparrow$, $1 - \text{sen}\, x \downarrow$, $S(x) \uparrow$

$\text{arc sen}\, \frac{10}{11} \leq x \leq \text{arc sen}\, \frac{20}{21}$

$\frac{10}{11} = \frac{20}{22} < \frac{20}{21}$

C