MINISTÉRIO DA AERONÁUTICA
CENTRO TÉCNICO DE AERONÁUTICA
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

CONCURSO DE ADMISSÃO - 1970

EXAME DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. A duração da prova é de 3 horas e 30 minutos .
2. A prova de Matemática consta de 25 questões de Múltipla Escôlha .
3. Só há uma resposta certa em cada questão .
4. NÃO DEIXE DE RESPONDER NENHUMA QUESTÃO. QUANDO EM DÚVIDA, ASSINALE A RESPOSTA QUE LHE PARECER MAIS CORRETA.
5. Questões não respondidas ocasionam rejeição do cartão pelo computador, *podendo* prejudicar o candidato .
6. Não escreva no caderno de questões .
7. Assinale com um traço curto e forte de lápis o espaço correspondente a cada questão, na fôlha de respostas.
8. Verificando algum engano nas respostas poderá corrigí-la usando borracha .
9. Observe cuidadosamente o número das questões ao respondê-las .
10. O agente fiscal fornecerá pepel para rascunho, o qual não será considerado na correção da prova .
11. Não será permitido o uso de tabelas, régua de cálculo, apontamentos, formulários e outros papéis a não ser os fornecidos pelo fiscal .
12. O caderno de questões contém 7 páginas numeradas de 2 a 8 .

1. Um polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ é tal que $P(-2) = -2$, $P(-1) = 3$, $P(1) = -3$ e $P(2) = 2$. Temos, então, que:

   a) $b = 0$

   b) $b = 1$

   c) $b = 2$

   d) $b = 3$

   e) Nenhuma das afirmações anteriores é válida .

2. Considere o conjunto C dos polinômios $P(x)$ de grau 3, tais que $P(x) = P(-x)$ para todo x real. Temos, então, que :

   a) C tem apenas dois elementos .

   b) C é o conjunto de todos os polinômios da forma $P(x) = a_o x^3 + bx$.

   c) C tem apenas um elemento .

   d) C tem uma infinidade de elementos.

   e) Nenhuma das afirmações anteriores é válida .

3. Considere os polinômios $P(x) = a_o x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$, de grau 4 , tais que $P(2) = P(3) = P(4) = P(r) = 0$, onde $r \notin \{2, 3, 4\}$. Temos, então, necessàriamente, que :

   a) $a_o > 4$

   b) $a_o < 0$

   c) $a_o = 0$

   d) $a_o > 0$

   e) Nenhuma das afirmações anteriores é válida .

4. Seja f uma função real tal que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, para todo x real, onde a, b, c, d são números reais. Se $f(x) = 0$ para todo x do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, temos, então, que :

   a) $f(6) = a + 1$

   b) $f(6) = a + 2$

   c) $f(6) = a + 3$

   d) $f(6) = d$

   e) Nenhuma das afirmações acima é válida .

5. Calculando as raizes simples e múltiplas da equação

$$x^6 - 3x^5 + 6x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$$

podemos afirmar que esta equação tem :

a) Uma raiz simples, duas duplas e uma tripla.

b) Uma raiz simples, uma dupla e uma tripla.

c) Duas raizes simples, uma dupla e uma tripla.

d) Duas raizes simples e duas duplas.

e) Duas raizes simples e uma tripla .

6. Para que as equações $(2\cos a - 1)x^3 - (3\cos a - \operatorname{sen} b)x^2 - 1 = 0$ e $(\cos a + 2)x^3 + (\cos a + 3\operatorname{sen} b)x^2 + 1 = 0$ tenham as mesmas raizes, basta que:

a) $\cos a = -1/5$ e $\operatorname{sen} b = -1/2$

b) $0 \leqslant \cos a \leqslant -1/3$ e $-1 \leqslant \operatorname{sen} b \leqslant 1/2$

c) $a = \arccos(-1/3)$ e $b = \operatorname{arcsen}(-1/6)$

d) $\cos a = -1/2$ e $\operatorname{sen} b = -1/5$

e) Nenhuma das respostas acima é suficiente.

7. Seja $P = \operatorname{sen}^2 ax - \operatorname{sen}^2 bx$. Temos, então, que :

a) $P = \operatorname{sen} ax.\cos bx$

b) $P = \cos\frac{a}{2}x.\operatorname{tg} bx$

c) $P = 2.\operatorname{sen}\frac{(a+b)}{2}x.\cos\frac{(a-b)}{2}x$

d) $P = \operatorname{sen}(a+b)x.\operatorname{sen}(a-b)x$

e) Nenhuma das respostas acima é válida .

8. Para que valores de $\underline{a}$, o quarto têrmo do desenvolvimento de $(a-\sec\frac{x}{2})^5$ é igual a $-10\left[\cos\frac{x}{2} + \operatorname{sen}\frac{x}{2}.\operatorname{tg}\frac{x}{2}.(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2)\right]$?

a) $a = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

b) $a = \operatorname{cossec}\frac{x}{2}$

c) $a = \cos x$

d) $a = \operatorname{sen} x$

e) Nenhuma das respostas acima é válida.

9. Consideremos um triângulo qualquer ABC . Sabendo que o complementar do ângulo $\hat{A}$ é igual a ϕ , e que o ângulo $\hat{C}$ vale 2ϕ , podemos concluir que senϕ vale:

a) $c/2a$

b) $c/3a$

c) $2c/3a$

d) c/a

e) $2c/a$

10. Dado o sistema $\begin{cases} x \cos a + y \operatorname{sen} a = \cos b \\ x \cos 2a + y \operatorname{sen} 2a = \cos(a+b) \end{cases}$

podemos dizer que para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

a) O sistema admite solução se $a \neq k\pi$

b) O sistema admite uma infinidade de soluções se $a \neq k\pi$ e $2a \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ e $b = (2k+1)\pi$.

c) O sistema não admite solução quaisquer que sejam os valores de a e b .

d) O sistema não admite solução se $a \neq k\pi$ e b qualquer .

e) O sistema é sempre possível e determinado .

11. Para que valores de x será possível $\log\left[\frac{(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)}\right]$?

a) $x \neq 2k\pi$, $k = 1,2, \ldots, n, \ldots$

b) $x \neq k\pi$, $k = 0,2,4, \ldots, 2n, \ldots$

c) $x \neq 2k\pi$, $k = 0,1,3, \ldots, (2n-1), \ldots$

d) $x \neq k\pi$, $k = 1,3, \ldots, (2n-1), \ldots$

e) Nenhum dos valores acima .

12. Para que a equação $\operatorname{sen} 2x = e^m \operatorname{tg} x$, com $x \neq k\pi$, k sendo número inteiro, tenha soluções em x, os valores de m devem satisfazer a relação :

a) $0 < m < 2$

b) $0 < m \leq \log 5$

c) $1 \leq m \leq \log 5$

d) $m \leq \log 2$

e) Nenhuma das respostas acima é válida .

13. Seja dada uma progressão geometrica de três têrmos positivos, tal que o primeiro têrmo, a razão, o terceiro têrmo e a soma dos três têrmos, formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Portanto, a razão da progressão geométrica é :

a) 1

b) 1/3

c) 2/3

d) 3

e) Nenhuma das respostas acima é válida .

14. Dados $\log_{10} 2 = a$ e $\log_{10} 3 = b$, então $\log_9 20$ é igual à :

a) $b/(1 + 2a)$

b) $a/(1 + b)$

c) $(1 + a)/2b$

d) $b/2a$

e) Nenhuma das respostas acima é válida .

15. A equação $3e^{x^2} - 2e^{-x^2} = -1$ apresenta solução :

a) $x = 0$

b) $x > 1$

c) $-1 < x < 1$

d) $-1 \leq x \leq \frac{2}{3}$

e) Nenhuma das respostas anteriores é válida .

16. Para que valores reais de $\underline{a}$ e $\underline{x}$, tem solução a equação

$$\log_x [\, a(3ax + 2a^2) \,] = 3$$

a) $x = a \quad a > 0$

b) $x = 5a \quad a > 0$

c) $x = 4a \quad a > 0$

d) $x = -2a \quad a < 0$

e) Nenhuma das respostas anteriores é válida .

17. Considere o binômio $\left[\frac{1}{x} + ax^2\right]^{36}$. Êste binômio possue um certo têrmo T independente de x. Se elevarmos ax^2 a uma certa potência α , o têrmo independente de x do nôvo binômio será o quinto têrmo. Temos, então, que :

a) T é o 12º têrmo. O valor de α é 4.
b) T é o 12º têrmo. O valor de α é 3.
c) T é o 13º têrmo. O valor de α é 3.
d) T é o 13º têrmo. O valor de α é 4.
e) T é o 13º têrmo. O valor de α é 5.

18. Considere o sistema de equações algébricas lineares :

$$\begin{cases} \alpha x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = \beta \end{cases}$$

O sistema terá solução única se :

a) $\beta = 0$ e $\alpha = 0$
b) $\beta = 0$ e $\alpha \neq 0$
c) $\beta \neq 0$ e $\alpha = 0$
d) $\beta = \alpha$
e) β e α forem números complexos conjugados.

19. Constroe-se um cone cuja geratriz é tangente a uma esfera de raio r, e cujo eixo passa pelo centro dessa esfera, de modo que sua base esteja situada a uma distância de r/2 do centro da esfera. O volume do cone é :

a) $\frac{3}{2} \pi r^3$

b) $\frac{1}{3} \pi r^3$

c) $\frac{4}{3} \pi r^3$

d) $\frac{9}{8} \pi r^3$

e) Nenhum dos resultados acima é válido .

20. Um bloco de madeira tem a forma de um paralelepípedo reto, com base quadrada de lado 5m e com altura de 1m. Tal bloco tem uma cavidade cilíndrica sendo que o eixo do cilindro que determina a cavidade passa pelo centro do paralelepípedo e faz com o plano da base um ângulo de 45 graus . O cilindro corta ambas as faces do paralelepípedo segundo uma circunferência de raio 1m. Qual é o volume do bloco ?

a) $(75 - \pi)\ m^3$

b) $(25 - 2\pi)\ m^3$

c) $(25 - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi)\ m^3$

d) $(25 - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi)\ m^3$

e) Nenhum dos resultados acima é válido .

21. Quanto à soma dos ângulos que uma reta forma com dois planos perpendiculares, podemos afirmar que

a) é menor do que 90 graus

b) é igual a 90 graus

c) é maior do que 90 graus e menor do que 180 graus

d) é igual a 180 graus

e) não podemos garantir nenhuma das respostas acima .

22. Quando a projeção de um ângulo θ sôbre um plano paralelo a um de seus lados é um ângulo reto, podemos afirmar que :

a) $90^o < \theta < 180^o$

b) $\theta < 90^o$

c) $\theta = 90^o$

d) $\theta = 2\pi$ rd

e) nenhuma das respostas acima é válida

23. Dentre as afirmações abaixo, assinale aquela que é correta .

a) Um plano fica perfeitamente determinado por uma parte qualquer de uma curva plana .

b) Um plano não fica perfeitamente determinado por uma parte qualquer de uma curva plana .

c) Três planos que se cortam têm sempre um ponto em comum.

d) Um plano e uma reta determinam sempre um ângulo poliédrico convexo .

e) Nenhuma das afirmações acima é válida .

24. Seja B um subconjunto do conjunto de números reais R. Dizemos que um número b é um ponto de acumulação do conjunto B, se para qualquer número real positivo k, arbitrariamente dado, existir um elemento c de B, tal que $0 < | b-c | < k$. Nestas condições, temos que $b = 10$, é um ponto de acumulação do conjunto dos números

a) naturais menores do que 10.

b) naturais menores ou iguais a 10 .

c) racionais maiores do que 1 e menores ou iguais a 9 .

d) racionais maiores do que 1 e menores do que 10 .

e) Nenhuma das afirmações anteriores é válida .

25. Sejam $P(x) = x^4 + a_o x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ e $Q(x) = a_3 x^4 + a_2 x^3 + a_1 x^2 + a_o x$ dois polinômios . Sabendo-se que $P(x) > 0$ para todo x real, temos, então, que :

a) $Q(a_3) > -2$

b) $Q(a_3) \leq -3$

c) $-2 < Q(a_3) < -1$

d) $Q(a_3) < -3$

e) Nenhuma das afirmações acima é válida .

ITA - MAT - 70

BOTELHO

1) $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$P(-2) = -8a + 4b - 2c + d = -2$ (I)

$P(-1) = -a + b - c + d = 3$ (II)

$P(1) = a + b + c + d = -3$ (III)

$P(2) = 8a + 4b + 2c + d = 2$ (IV)

(I) + (IV) $\rightarrow 8b + 2d = 0 \therefore b = -\frac{d}{4}$ (V)

(II) + (III) $\rightarrow 2b + 2d = 0 \therefore b = -d$ (VI)

DE (V) e (VI) $\rightarrow -\frac{d}{4} = -d \therefore d = 0$

$b = -\frac{d}{4} = -d = 0$ // a //

2) $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$P(-x) = -ax^3 + bx^2 - cx + d$

$P(x) = P(-x)$ → POLINÔMIO PAR

$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv -ax^3 + bx^2 - cx + d$

$a = -a \therefore a = 0$ → NÃO É DE ORDEM 3

$c = -c \therefore c = 0$

NÃO HÁ POLINÔMIOS DE ORDEM 3

C É VAZIO // e //

3) $P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$

raízes → 2, 3, 4, r

$P(x) = a_0(x-2)(x-3)(x-4)(x-r)$

NADA SE PODE AFIRMAR SOBRE a_0 //

e //

4) $f(x)$ É POLINÔMIO DE 3º GRAU

SE ELE TEM 5 RAÍZES, ENTÃO

$a = b = c = d = 0$ E $f(x) = 0$

$f(6) = 0 = d$ // d //

5) $A(x) = x^6 - 3x^5 + 6x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

TESTANDO $x = 1 \rightarrow 1 - 3 + 6 - 3 - 3 + 2 = 0$

$x = 1$ É RAIZ

BRIOT-RUFFINI

	1	-3	0	6	-3	-3	2
1	1	-2	-2	4	1	-2	0

$B(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 2$

TESTANDO $x = 1 \rightarrow 1 - 2 - 2 + 4 + 1 - 2 = 0$

$x = 1$ É RAIZ DUPLA

BRIOT-RUFFINI

	1	-2	-2	4	1	-2
1	1	-1	-3	1	2	0

$C(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$

TESTANDO $x = 1 \rightarrow 1 - 1 - 3 + 1 + 2 = 0$

$x = 1$ É RAIZ TRIPLA

BRIOT-RUFFINI

	1	-1	-3	1	2
1	1	0	-3	-2	0

$D(x) = x^3 - 3x - 2$

TESTANDO $x = 2 \rightarrow 8 - 6 - 2 = 0$

$x = 2$ É RAIZ

BRIOT-RUFFINI

	1	0	-3	-2
2	1	2	1	0

$E(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \rightarrow -1$ É RAIZ DUPLA

UMA SIMPLES, UMA DUPLA, UMA TRIPLA // b //

ITA - MAT - 70

BOTELHO

(6) $(2\cos a-1)\,x^3-(3\cos a-\operatorname{sen} b)\,x^2+0x-1=0$

$(\cos a+2)\,x^3+(\cos a+3\operatorname{sen} b)\,x^2+0x+1=0$

A 1ª EQUAÇÃO É SIMÉTRICA DA 2ª

EM x^3

$-(2\cos a-1)=\cos a+2$

$-2\cos a+1=\cos a+2$

$-3\cos a=1 \quad \therefore \quad \cos a=-\frac{1}{3}$

$a=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ //

EM x^2

$3\cos a-\operatorname{sen} b=\cos a+3\operatorname{sen} b$

$2\cos a=4\operatorname{sen} b \quad \therefore \quad \operatorname{sen} b=\frac{\cos a}{2}$

$\operatorname{sen} b=-\frac{1}{6} \quad \therefore \quad b=\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{1}{6}\right)$ //

c //

(7) $P=\operatorname{sen}^2 ax-\operatorname{sen}^2 bx=(\operatorname{sen} ax+\operatorname{sen} bx)(\operatorname{sen} ax-\operatorname{sen} bx)$

$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$

$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=2\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

$\begin{cases}\alpha+\beta=ax\\ \alpha-\beta=bx\end{cases} \Rightarrow \quad \alpha=\left(\frac{a+b}{2}\right)x \qquad \beta=\left(\frac{a-b}{2}\right)x$

$P=2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cdot 2\operatorname{sen}\beta\cos\alpha=$

$=\operatorname{sen}2\alpha\cdot\operatorname{sen}2\beta=$

$=\operatorname{sen}(a+b)x\cdot\operatorname{sen}(a-b)x$ //

d //

(8) $T_{p+1}=\binom{5}{p}a^{5-p}\cdot\left(-\sec\frac{x}{2}\right)^p$

$p=3 \;\therefore\; T_4=-\binom{5}{3}a^2\sec^3\frac{x}{2}=-10\,a^2\sec^3\frac{x}{2}$

$\dfrac{a^2}{\cos^3\frac{x}{2}}=\cos\frac{x}{2}+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\right)$

$a^2=\cos^4\frac{x}{2}+\cos^3\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$

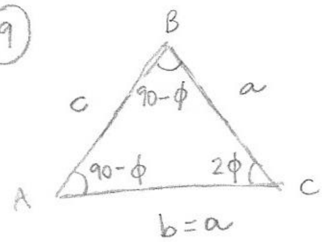
$a^2=\cos^4\frac{x}{2}+\cos^3\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(\dfrac{\operatorname{sen}^3\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}-2\dfrac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)$

$a^2=\cos^4\frac{x}{2}+\operatorname{sen}^4\frac{x}{2}-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$

$a^2=\left(\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)^2=\cos^2 x$

$a=\pm\cos x$ // $\quad a=\cos x$ serve $\quad$ c //

(9)



$\dfrac{c}{\operatorname{sen}2\phi}=\dfrac{a}{\operatorname{sen}(90-\phi)}$

$\dfrac{c}{2\operatorname{sen}\phi\cos\phi}=\dfrac{a}{\cos\phi}$

$\operatorname{sen}\phi=\dfrac{c}{2a}$ // $\quad$ a //

(10) $x=\dfrac{\begin{vmatrix}\cos b & \operatorname{sen} a\\ \cos(a+b) & \operatorname{sen}2a\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos a & \operatorname{sen} a\\ \cos 2a & \operatorname{sen}2a\end{vmatrix}}=\dfrac{\cos b\cdot\operatorname{sen}2a-\operatorname{sen} a\cos(a+b)}{\cos a\cdot\operatorname{sen}2a-\operatorname{sen} a\cos 2a}=$

$=\dfrac{2\operatorname{sen} a\cos a\cos b-\operatorname{sen} a\cos a\cos b+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen}(2a-a)}=$

$=\dfrac{\operatorname{sen} a\cos a\cos b+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}$

Se $\operatorname{sen} a\neq 0$ $\rightarrow x=\cos a\cos b+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b=\cos(a-b)$
$(a\neq k\pi)$

Se $\operatorname{sen} a=0$ $\rightarrow x=0/0$ (indeterminado)
$(a=k\pi)$

(continua...)

ITA - MAT - 70

BOTELHO

(continuação da 10)

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \cos a & \cos b \\ \cos 2a & \cos(a+b) \end{vmatrix}}{\operatorname{sen} a} = \frac{\cos a \cos(a+b) - \cos b \cos 2a}{\operatorname{sen} a} =$$

$$= \frac{\cos a \cos a \cos b - \cos a \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b - \cos b\,(2\cos^2 a - 1)}{\operatorname{sen} a} =$$

$$= \frac{-\cos^2 a \cos b + \cos b - \cos a \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} =$$

$$= \frac{\cos b\,(1-\cos^2 a) - \cos a \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 a \cos b - \operatorname{sen} a \cos a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}$$

Se $\operatorname{sen} a \neq 0 \rightarrow y = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$

$(a \neq k\pi)$ $\quad y = \operatorname{sen}(a-b)$

Se $\operatorname{sen} a = 0 \rightarrow y = 0/0$ (indeterminado)

$(a = k\pi)$

Conclusão

Se $a = k\pi \rightarrow$ (sistema indeterminado) infinidade de soluções

Se $a \neq k\pi \rightarrow$ $x = \cos(a-b)$

$y = \operatorname{sen}(a-b)$

(sistema possível e determinado)

a//

---

(11) $\log\left[\dfrac{(1-\cos x)}{(1+\cos x)}\right]$ EXISTE SE:

→ O ARGUMENTO FOR > 0

→ O DENOMINADOR FOR $\neq 0$

$\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} > 0$ E $1 + \cos x \neq 0$

		−1		1	
$\cos x$	+		+	0	−
$\cos x$	−	∄	+		+
Q	−	∄	+	0	−

$-1 < \cos x < 1$

E

$\cos x \neq -1$

$-1 < \cos x < 1 \rightarrow x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$//

e//

---

(12) $\operatorname{sen} 2x = e^m \cdot \operatorname{tg} x$

$2 \operatorname{sen} x \cos x = e^m \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$x \neq k\pi \rightarrow \operatorname{sen} x \neq 0 \rightarrow 2\cos^2 x = e^m$

$0 \leq \cos^2 x < 1 \rightarrow 0 \leq 2\cos^2 x < 2$

$0 \leq e^m < 2 \rightarrow m \ln e < \ln 2$

$m < \ln 2$// $\qquad$ e//

---

(13) $PG = a, aq, aq^2$

$PA = a, q, aq^2, a + aq + aq^2$

$r = q - a \quad (1)$

$r = aq^2 - q \quad (2)$

$r = aq^2 + aq + a - aq^2 = aq + a \quad (3)$

(1) e $(2) \rightarrow q - a = aq^2 - q \therefore 2q = a(1+q^2)$

$a = \dfrac{2q}{1+q^2} \quad (4)$

(1) e (4) em (3)

$q - \dfrac{2q}{1+q^2} = \dfrac{2q^2}{1+q^2} + \dfrac{2q}{1+q^2}$

$(1+q^2)q = 2q^2 + 4q \therefore 1 + q^2 = 2q + 4$

$q^2 - 2q - 3 = 0 \therefore q = 3$ ou $q = -1$

Se $q = -1 \rightarrow a = -\dfrac{2}{2} = -1 \rightarrow$ NÃO

Se $q = 3 \rightarrow a = \dfrac{6}{10} \rightarrow$ OK $\rightarrow q = 3$// $\qquad$ d//

(14) $\log_9 20 = \dfrac{\log_{10} 20}{\log_{10} 9} = \dfrac{\log_{10} 10 + \log_{10} 2}{2 . \log_{10} 3} =$

$= \dfrac{1+a}{2b}$ // c//

---

(15) $e^{x^2} = y \therefore e^{-x^2} = \dfrac{1}{e^{x^2}} = \dfrac{1}{y}$

$3y - \dfrac{2}{y} + 1 = 0 \therefore 3y^2 + y - 2 = 0$

$y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4.3(-2)}}{6} = \dfrac{-1 \pm 5}{6}$ ↗ -1 NÃO ↘ $\dfrac{2}{3}$ SIM

$e^{x^2} = \dfrac{2}{3} \therefore x^2 = \ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$

MAS $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right) < 0$ → NÃO HÁ SOLUÇÃO// e//

---

(16) $\log_x \left[a(3ax + 2a^2)\right] = 3$

$a(3ax + 2a^2) = x^3 \therefore x^3 - 3a^2x - 2a^3 = 0$

Por inspeção, $x = 2a$ é solução:

$8a^3 - 3a^2 . 2a - 2a^3 = 8a^3 - 6a^3 - 2a^3 = 0$

Briot-Ruffini

	1	0	$-3a^2$	$-2a^3$
$2a$	1	$2a$	a^2	0

$x^2 + 2ax + a^2 = 0 \therefore x = \dfrac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2}}{2}$

$x = -a$ é raiz dupla

Mas $x > 0$ e $a(3ax + 2a^2) > 0$

$3a^2x + 2a^3 > 0 \therefore 3a^2x > -2a^3$

Se $a > 0 \rightarrow x > -\dfrac{2a}{3} \rightarrow x = 2a$ OK

Se $a < 0 \rightarrow a = -|a| \rightarrow -|a|(-3|a|x + 2|a|^2) > 0$

$3|a|^2x - 2|a|^3 > 0 \therefore x > \dfrac{2|a|}{3}$

$x = -a = |a| > \dfrac{2|a|}{3}$ OK

$\begin{cases} x = 2a, \ a > 0 \\ x = -a, \ a < 0 \end{cases}$ → NENHUMA// e//

---

(17) $T_{p+1} = \dbinom{36}{p}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{36-p}(ax^2)^p$

$x^{p-36} . x^{2p} = x^0 \therefore 3p - 36 = 0 \therefore p = 12$

$p+1 = 13$//

$T_{q+1} = \dbinom{36}{q}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{36-q}(ax^2)^{\alpha q}$

$x^{q-36} . x^{2\alpha q} = x^0 \therefore q = 4$

$4 - 36 + 8\alpha = 0 \therefore 8\alpha = 32 \therefore \alpha = 4$//

13º termo e $\alpha = 4$ → d//

---

(18) $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ \beta & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-2\beta + \beta}{-\alpha + 1 - 4 - 2\alpha + 1 + 2}$

$x_1 = \dfrac{-\beta}{-3\alpha} = \dfrac{\beta}{3\alpha} \rightarrow \alpha \neq 0$

$x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & \beta & 1 \end{vmatrix}}{-3\alpha} = \dfrac{\beta - 2\alpha\beta}{-3\alpha} = \dfrac{-\beta}{3\alpha} + \dfrac{2\beta}{3}$

$x_3 = x_2 - \alpha x_1 = \dfrac{-\beta}{3\alpha} + \dfrac{2\beta}{3} - \dfrac{\beta}{3} = \dfrac{-\beta}{3\alpha} + \dfrac{\beta}{3}$

Se $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$ (nada impede escolher esse β)

Então o sistema terá solução única $(0,0,0)$//

Não pode dizer que $\alpha = \beta$ porque $\alpha = \beta = 0$ não atende

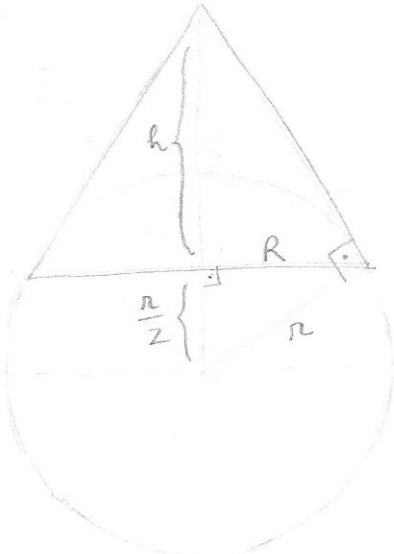
Não pode dizer que $\alpha = \overline{\beta}$ porque $\alpha = \beta = 0$ não atende

b//

ITA – MAT – 70

BOTELHO

(19)



$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} \therefore R^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4}$$

$$r^2 = \left(h + \frac{r}{2}\right) \cdot \frac{r}{2} \therefore h = 2r - \frac{r}{2} = \frac{3r}{2}$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3r^2}{4} \cdot \frac{3r}{2} = \frac{3}{8}\pi r^3$$ e

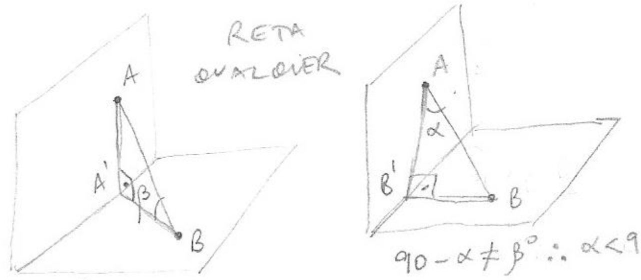
(20)

$V_{paralelepípedo} = 5 \cdot 5 \cdot 1 = 25$

$V_{cilindro} = \pi R^2 h = \pi$

$V = (25 - \pi)\, m^3$ e

(21) RETA QUALQUER



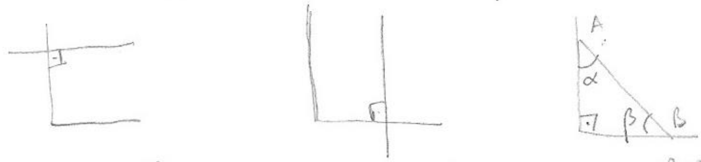
$90^\circ - \beta \neq \alpha$

$\beta < 90^\circ$

$90 - \alpha \neq \beta^\circ \therefore \alpha < 90^\circ$

$\alpha + \beta \neq 90^\circ$

$\alpha + \beta < 180^\circ$



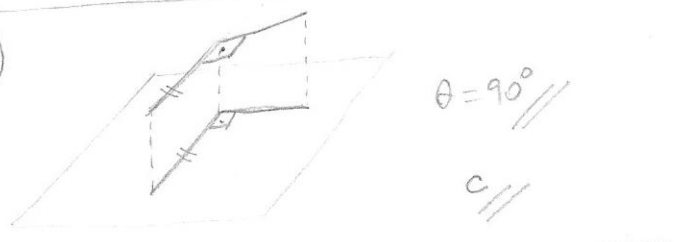
RETA DE TOPO — $90^\circ + 0^\circ = 90^\circ$

RETA VERTICAL — $90^\circ + 0^\circ = 90^\circ$

RETA DE PERFIL — $\alpha + \beta = 90^\circ$

NÃO SE PODE AFIRMAR NADA SOBRE $\alpha + \beta$ e

(22)



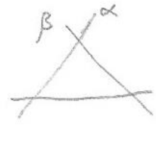
$\theta = 90^\circ$

c

(23) a) SE 3 PONTOS DEFINEM UM PLANO, ENTÃO N PONTOS DE UMA CURVA PLANA DEFINEM UM PLANO ✓

b) ERRADA (a É CERTA)

c)



α, β E γ SE CORTAM MAS NÃO TÊM PONTO COMUM AOS TRÊS ✗

d) SE A RETA FOR PARALELA AO PLANO, NÃO HAVERÁ VÉRTICE NEM ÂNGULO ✗

a

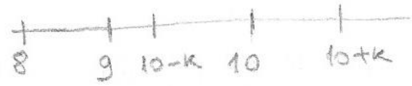
(24) $|b-c|<k \therefore -k < b-c < k$

$c < b+k$ e $b-k < c$

$0<|b-c| \therefore b \neq c$

EM QQ INTERVALO $(b-k, b+k)$ TEM QUE EXISTIR ALGUM ELEMENTO $c \neq b$

a)



BASTA $k<1$ PARA NÃO HAVER C

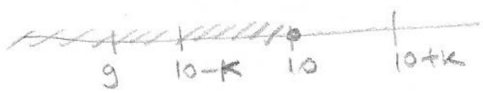
b)

BASTA $k<1$ PARA NÃO HAVER C

c)

BASTA $k<1$ PARA NÃO HAVER C

d)



SEMPRE HAVERÁ UM C RACIONAL ENTRE $10-k$ E 10

d //

(25) $P(x) = x^4 + a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^4} + \frac{a_0}{x^3} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x} + a_3 =$$

$$= \frac{1 + a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4}{x^4} =$$

$$= \frac{1 + Q(x)}{x^4}$$

$P\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ porque $P(x) > 0, \forall x$

$$\frac{1+Q(x)}{x^4} > 0$$

Se $x \neq 0 \to x^4 > 0 \to 1 + Q(x) > 0$

$Q(x) > -1 \to Q(x) > -2, x \neq 0$

Se $x = 0 \to Q(0) = 0 \to Q(x) > -2, x = 0$

$Q(x) > -2, \forall x$, inclusive $x = a_3$ //

a //