/

MINISTÉRIO DA AERONÁUTICA
CENTRO TÉCNICO DE AERONÁUTICA
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

CONCURSO DE ADMISSÃO - 1969

EXAME DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. A duração da prova é de 4 horas .
2. A prova de Matemática consta de 25 questões de Múltipla Escôlha .
3. Só há uma resposta certa em cada questão .
4. NÃO DEIXE DE RESPONDER NENHUMA QUESTÃO. QUANDO EM DÚVIDA, ASSINALE A RESPOSTA QUE LHE PARECER MAIS CORRETA.
5. Questões não respondidas ocasionam rejeição do cartão pelo computador, podendo prejudicar o candidato .
6. Não escreva no caderno de questões .
7. Assinale com um traço curto e forte de lápis o espaço correspondente a cada questão, na fôlha de respostas .
8. Verificando algum engano nas respostas poderá corrigí-la usando borracha .
9. Observe cuidadosamente o número das questões ao respondê-las .
10. O agente fiscal fornecerá papel para rascunho, o qual não será considerado na correção da prova .
11. Não será permitido o uso de tabelas, régua de cálculo, apontamentos, formulá - rios e outros papéis a não ser os fornecidos pelo fiscal .
12. O caderno de questões contém 9 páginas numeradas de 2 a 10 .

1. Considere a equação $a^{2x} + a^{x} - 6 = 0$, com $a > 1$. Uma das afirmações abaixo, relativamente à equação proposta, está correta . Assinale-a .

A) $a^x = 2$ e $a^x = -3$

B) $x = \log_a 2$

C) $x = \log_a 2$ e $x = -3$

D) $x = 2$ e $x = \log_a 3$

E) Nenhuma das opções anteriores é verdadeira .

2. Dada a equação $x^{2^{b\log x}} - x = 0$, com b inteiro e positivo e log x significando logarítmo neperiano de x, e dadas as afirmações abaixo relativas à equação proposta, assinalar a que fôr correta .

A) $x = 0$

B) $x = 2 + b$

C) $x = e^{2b}$

D) $x = b \log 2$

E) Nenhum dos valores acima é solução .

3. Para que valores de t, o seguinte sistema

$$\begin{cases} x + y = \pi \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \log_{10} t^2 \end{cases}$$

admite solução ?

A) $0 < t < 10$

B) $0 < t < 10\pi$

C) $0 < t < 10^2$

D) $0,1 \leqslant t \leqslant 10$

E) Em nenhum dos intervalos indicados acima .

4. A equação $\operatorname{sen}^2 \frac{3x}{2} - \cos \frac{3x}{2} = a$ tem solução para valores particulares de a . Assinale um dos itens abaixo que lhe parecer correto .

A) $1 < a < \frac{7}{4}$

B) $-2 < a < \frac{5}{4}$

C) $-1 < a < \frac{1}{4}$

D) $1 < a < \frac{3}{2}$

E) Nenhum dos intervalos acima .

5. Consideremos a equação

$$(tga)^{\cos^2 x - (\cos x)\log b^7 + 8(\log b)^2} = (cotga)^{-2(\log b)^2}$$

onde $\frac{\pi}{4} < a < \frac{\pi}{2}$, a fixado, $b > 0$ e logb indica o logarītmo neperiano de b. A equação acima tem solução em x se;

A) $0 < \log b$

B) $-\frac{1}{7} < \log b < 2$

C) $-2 < \log b < \frac{1}{7}$

D) $-2 < \log b < 1$

E) $-\frac{1}{6} < \log b < \frac{1}{8}$

6. Sejam p um número primo e n um número inteiro maior que 1 .
Consideremos a igualdade

$$p^n = z + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{p^n}{p^m}$$

Assinale o (s) valor (es) de z que satisfaz(em) à igualdade acima .

A) Para todo número inteiro z tal que $1 < z < p$.

B) z é um inteiro qualquer.

C) $z = 1$ ou para todo número real $z > p$.

D) $z = n.\log p$, onde log p indica o logarītmo neperiano de p .

E) z é um número inteiro tal que $z \neq 1$.

7. Dizemos que um conjunto C de pontos do espaço é convexo se dados pontos A e B quaisquer, pertencentes a C, o segmento de reta A B está contido em C. Há conjunto convexo numa das afirmações abaixo ? Assinale a afirmação verdadeira .

A) O plano excluido um dos seus pontos .
B) O conjunto dos pontos situados sôbre uma câmara de ar de automóvel .
C) A região plana limitada por um quadrilátero .
D) A superfície lateral de um prisma .
E) Nenhum dos conjuntos acima .

8. Consideremos um tetraedro regular de aresta $\underline{a}$. Podemos calcular o volume V deste sólido, em função da aresta a . Qual das afirmações abaixo é verdadeira ?

A) $12 \sqrt{2}\ V = 2a^3$

B) $2 \sqrt{2}\ V = 2a^3 \sqrt{3}$

C) $12\ V - \sqrt{2} = a^3 \sqrt{2}$

D) $5\ V - \sqrt{3} = 2 \sqrt{3}\ a^3$

E) As afirmações A,B,C e D acima são falsas .

9. A soma $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n}$ é igual a

A) $n\ 2^{n-1}$

B) 2^n

C) $n\ 2^n$

D) $(n+1)\ 2^{n+1}$

E) $n.\ 2^{n+1}$

10. Numa superfície poliédrica convexa aberta, o número de faces é 6 e o número de vértices é 8 . Então o número de arestas é

A) 8
B) 11
C) 12
D) 13
E) 14

11. Consideremos uma esfera de raio r e nela inscrevemos um cône reto cujo diâmetro da base tem comprimento igual ao da geratriz .
O volume V do cône em função do raio da esfera verifica uma das afirmações abaixo. Assinale-a .

A) $V = 3\ \pi r^3$

B) $V = \frac{3}{8}\ \pi r^3$

C) $V = \frac{2}{3}\ \pi r^3$

D) $V = \frac{3}{2}\ \pi r^3$

E) Nas condições dadas, não é possível obter o volume V em função do raio .

12. Seja $x^5 - 3x^4 - 2x^2 + 4x - 2 = 0$.
Assinale a afirmação correta com relação à equação acima .

A) não tem raizes reais positivas
B) não tem raizes reais negativas
C) só tem raizes complexas
D) tem duas raizes negativas
E) nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira .

13. Considere a equação

$2^x + 2^{-x} = 2\ K$.
Para determinados valores de K a equação admite soluções reais. A coleção de todos êstes valores de K está definida num dos itens abaixo .

A) $- 1 < K < 1$

B) $K > 0$

C) Para todo K diferente de 1

D) Para todo K real

E) $|K| \geq 1$

14. Sejam $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x - 1$, duas funções reais. Definimos a função composta de f e g como sendo $(g.f)(x) = g(f(x))$. Então $(g.f)(y-1)$ é igual a :

A) $y^2 - 2y + 1$

B) $(y - 1)^2 + 1$

C) $y^2 + 2y - 2$

D) $y^2 - 2y + 3$

E) $y^2 - 1$

15. Sejam R o conjunto dos números reais e C um subconjunto de R . Definimos supremo de C como sendo o número real L satisfazendo as seguintes condições :
1º L é maior ou igual a qualquer número pertencente a C .
2º Dado um número real $L' < L$, existe sempre um número x' de C tal que $x' > L'$.
Seja C o conjunto dos números naturais menores do que 11 .
Uma das afirmações abaixo, relativas ao conjunto C, é verdadeira. Assinale-a.

A) $L = 9$
B) $L = 10$
C) $L = 11$
D) $L = 12$
E) Não existe o supremo

16. Seja C o conjunto de todos os polinômios P(x) de grau 2 que se anulam para $x = 1$ e $x = 2$. Seja D o conjunto de todos os polinômios P(x) de grau 2 que se anulam para $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$. Então uma das afirmações abaixo é verdadeira .

A) C = D

B) a união de C com D é igual a D .

C) C está contido em D

D) D está contido em C

E) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira .

17. Consideremos um plano α e uma reta r que encontra esse plano num ponto P, e que não é perpendicular a α
Assinale qual das afirmações é a verdadeira :

A) Existem infinitas retas de α perpendiculares a r pelo ponto P .

B) Existe uma e somente uma reta de α perpendicular a r por P .

C) Não existe reta de α , perpendicular a r, por P .

D) Existem duas retas de α perpendiculares a r passando por P .

E) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira .

18. Seja C_1 o conjunto das soluções do sistema

$$\begin{cases} 4x + 12y = 4 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

e seja C_2 o conjunto das soluções do sistema

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$$

Então temos :

A) $C_1 = C_2$

B) C_1 está contido em C_2

C) C_2 está contido em C_1

D) a intersecção de C_1 e C_2 é vazia .

E) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira .

19. Os coeficientes A,B,C e D do polinômio $P(x) = A x^3 + B x^2 + C x + D$ devem satisfazer certas relações para que P(x) seja um cubo perfeito. Assinale a opção correta para que isto se verifique .

A) $D = \dfrac{C^2 A}{3B}$

B) $C = \dfrac{B}{3A^3}$ e $D = \dfrac{B^2}{27A^3}$

C) $BC = 3A$ e $CD^2 = B^2 A^2$

D) $C = \dfrac{B^2}{3A}$ e $D = \dfrac{B^3}{27A^2}$

E) Nenhuma das opções anteriores é verdadeira .

20. Para que valores reais de a e b o seguinte sistema não admite solução ?

$$\begin{cases} 3x + ay + 4z = 0 \\ x + y + 3z = -5 \\ 2x - 3y + z = b \end{cases}$$

A) $a = -2$ e $b = 5$

B) $a > -2$ e $b \neq 4$

C) $a = -2$ e $b \neq 5$

D) $a = b = 1$

E) Nenhuma resposta acima é válida

21. Consideremos a função $f(x) = x^3 - 1 + (1 - x)(x^2 + x + 1)$.
O conjunto de todas as soluções da equação $f(x) = 0$ é :

A) $\{ -1, 0, 1 \}$

B) x reais tais que $-2 \leqslant x \leqslant 1$

C) x reais positivos

D) conjunto vazio

E) conjunto de todos os números reais

22. O conjunto dos pares de números reais x e y, que satisfazem à desigualdade

$$\log_{x+1}(y - 2) > 0$$

está entre as opções abaixo :

A) $-1 < x < 0$ e $y > 3$

B) $x > 0$ e $2 < y < 3$

C) $x > 0$ e $y > 3$ ou $-1 < x < 0$ e $2 < y < 3$

D) $x > -1$ e $y > 2$

E) $x < 0$ e $2 < y < 3$

23. Resolvendo a equação $C_{15,x-1} = C_{15,2x+1}$, onde $C_{m,p}$ significa o número de combinações simples (sem repetição) de m elementos tomados p a p , obtemos :

A) $x = -2$ e $x = 5$

B) $x = 2$ e $x = -2$

C) $x = 2$ e $x = 5$

D) $x = 2$

E) Nenhuma das afirmações acima .

24. Sejam $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$ matrizes quadradas 2×2 .

Definimos as matrizes : $\alpha . X$; $X + Y$ e $X . Y$ (α = número real) por :

$$\alpha . X = \begin{pmatrix} \alpha\, x_{11} & \alpha\, x_{12} \\ \alpha\, x_{21} & \alpha\, x_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X + Y = \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} & x_{12} + y_{12} \\ x_{21} + y_{21} & x_{22} + y_{22} \end{pmatrix}$$

$$X.Y = \begin{pmatrix} x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} & x_{11}y_{12} + x_{12}y_{22} \\ x_{21}y_{11} + x_{22}y_{21} & x_{21}y_{12} + x_{22}y_{22} \end{pmatrix}$$

Uma das afirmações abaixo é verdadeira, assinale-a :

A) $X.X = \begin{pmatrix} x_{11}^2 & x_{12}^2 \\ x_{21}^2 & x_{22}^2 \end{pmatrix}$

B) det (α.X) = α det X, onde X = determinante de X .

C) det (X + Y) = det X + det Y

D) det (αX) = α^2 det X

E) det (X.Y) = det X + det Y

25. Considere o plano de uma mesa e um ponto dado dêste plano. Você dispõe de uma folha de papel que possue um só bordo reto . Dobrando esta folha de papel, conduza uma perpendicular ao plano da mesa, pelo ponto dado . A justificativa de tal construção está em um dos teoremas abaixo .

A) Se uma reta é perpendicular a um plano, todo plano que passa por ela é perpendicular ao primeiro .

B) Se dois planos são perpendiculares, tôda reta de um dêles que fôr perpendicular à intersecção, será perpendicular ao outro .

C) Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes pelo seu ponto de intersecção, então a reta é perpendicular ao plano determinado, por essas duas retas .

D) Por um ponto exterior a um plano passa uma reta perpendicular ao plano e sòmente uma .

E) Todas as perpendiculares a uma reta traçadas por um de seus pontos, pertencem a um plano .

ITA - MAT - 1969

BOTELHO.

(1) $y = a^x \therefore y^2 + y - 6 = 0$

SOMA $= -1$ E PRODUTO $= -6$

$y_1 = 2$ E $y_2 = -3$

$a^x = 2 \therefore x = \log_a 2$

$\cancel{a^x = -3 \therefore x = \log_a -3}$

SE $a > 1$, NÃO HÁ COMO $a^x = -3$

B

(2) $\log x \Leftrightarrow \ln x$

$x^{2^{b\ln x}} - x = 0$

$x \neq 0$ PARA HAVER $\ln x$

$x^{2^{b\ln x}} = x \therefore 2^{b\ln x} = 1$

$b \ln x = 0 \therefore x = 1$

E

(3) $\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}\, x$

$y = \pi - x \therefore \text{sen}\, y = \text{sen}\, x$

$\text{sen}\, x + \text{sen}\, y = 2\,\text{sen}\, x \therefore -2 \leq 2\,\text{sen}\, x \leq 2$

$-2 \leq \log_{10} t^2 \leq 2$

$\log_{10} t^2 = -2 \therefore t^2 = 10^{-2} \therefore t = 10^{-1} = 0{,}1$

$\log_{10} t^2 = 2 \therefore t^2 = 10^2 \therefore t = 10$

$0{,}1 \leq t \leq 10$

D

(4) $\text{sen}^2 \frac{3x}{2} = 1 - \cos^2 \frac{3x}{2}$

$1 - \cos^2 \frac{3x}{2} - \cos \frac{3x}{2} = a$

VALOR MÁXIMO DE $\cos^2 \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2}$ OCORRE

PARA $\cos \frac{3x}{2} = 1 \rightarrow 2 \rightarrow a_{MÍN} = 1 - 2 = -1$

$y = \cos \frac{3x}{2} \therefore -y^2 - y + 1 = a$

$a_{MÁX} = \frac{-\Delta}{4\text{"}a\text{"}} = \frac{4\text{"}a\text{"}\text{"}c\text{"} - \text{"}b\text{"}^2}{4\text{"}a\text{"}} = \frac{4\cdot(-1)\cdot 1 - (-1)^2}{4(-1)} =$

$= \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$

$-1 \leq a \leq \frac{5}{4}$

O ÚNICO INTERVALO CONTIDO É $-1 < a < \frac{1}{4}$

C

(5) $(\text{tg}\, a)^u = (\text{ctg}\, a)^v = (\text{tg}\, a)^{-v}$

$u = -v$

$\cos^2 x - (\cos x)\ln b^7 + 8(\ln b)^2 = 2(\ln b)^2$

$\cos^2 x - 7\ln b \cos x + 6(\ln b)^2 = 0$

SOMA $= 7 \ln b \therefore$ PRODUTO $= 6(\ln b)^2$

$\cos x = 6 \ln b$ OU $\cos x = \ln b$

$-1 \leq 6\ln b \leq 1$ OU $-1 \leq \ln b \leq 1$

$-\frac{1}{6} \leq \ln b \leq \frac{1}{6}$ OU $-1 \leq \ln b \leq 1$

O ÚNICO INTERVALO CONTIDO É $-\frac{1}{6} < \ln b < \frac{1}{8}$

E

⑥ $p^n = z + \sum_{n=1}^{n-1} \frac{p^n}{p^n}$

$p^n = z + \frac{p^n}{p} + \frac{p^n}{p^2} + \ldots + \frac{p^n}{p^{n-1}}$

$p^n = z + p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + p$

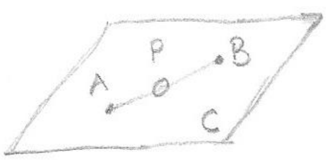
$z = p^n - p^{n-1} - p^{n-2} - \ldots - p =$

$= p\left(p^{n-1} - p^{n-2} - \ldots - 1\right)$

z É UM NÚMERO INTEIRO $\neq 1$ PORQUE É MÚLTIPLO DE p //

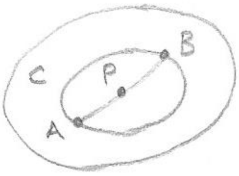
E //

⑦ A)



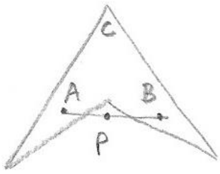
$P \notin C$
$P \in AB$
ERRADA

B)



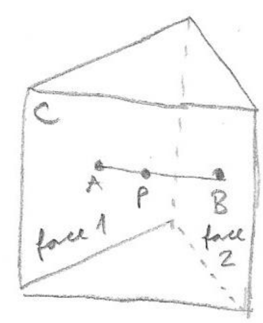
$P \notin C$
$P \in AB$
ERRADA

C)



$P \notin C$
$P \in AB$
ERRADA

D)

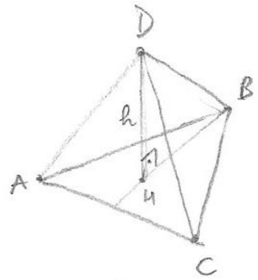


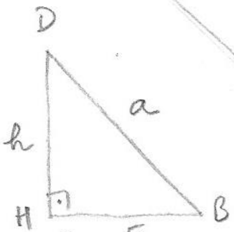
C = faces
$A \in$ face 1
$B \in$ face 2
$P \in AB$
$P \notin C$
ERRADA

NENHUM DOS CONJUNTOS É CONVEXO //

E //

⑧





$\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot h$

$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} =$

$= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

$12V = a^3\sqrt{2} \therefore 12\sqrt{2}\,V = 2a^3$ //

A //

⑨ $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} =$

$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!} =$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} =$

$= n\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{n-1}\right]$

$(1+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 1^{n-1-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} =$

$= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1}$

SOMA $= n \cdot 2^{n-1}$ //

A //

PROVA $\rightarrow n = 1 \rightarrow \binom{1}{1} = 1 = 1 \cdot 2^{1-1}$

$n = 2 \rightarrow \binom{2}{1} + 2\binom{2}{2} = 4 = 2 \cdot 2^{2-1}$

$n = 3 \rightarrow \binom{3}{1} + 2\binom{3}{2} + 3\binom{3}{3} = 12 = 3 \cdot 2^{3-1}$

ITA – MAT – 1969

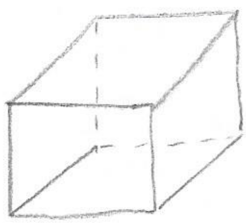
BOTELHO

(continuação)

(10) RELAÇÃO DE EULER $V+F=A+2$

$A=V+F-2=8+6-2=12$

UM CUBO É UM EXEMPLO



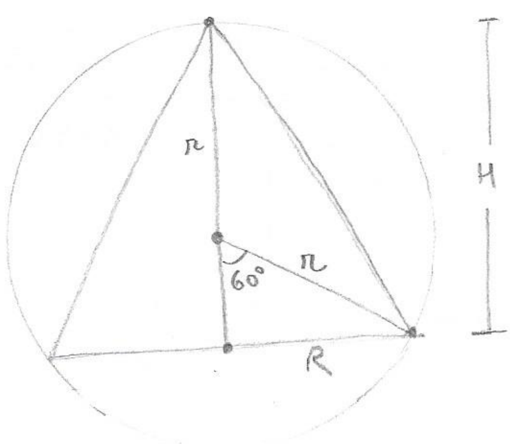
6 faces

8 vértices

12 arestas

C

(11)



SE O DIÂMETRO DA BASE É IGUAL À GERATRIZ, O TRIÂNGULO É EQUILÁTERO

$V=\frac{\pi R^2 H}{3} \therefore R=r\,\text{sen}\,60^\circ=\frac{r\sqrt{3}}{2}$

$H=r+r\cos 60^\circ=r+\frac{r}{2}=\frac{3r}{2}$

$V=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{3r^2}{4}\cdot\frac{3r}{2}=\frac{3}{8}\pi r^3$

B

(12) $x^5-3x^4-2x^2+4x-2=0$

$x^5-3x^4=2x^2-4x+2$

$x^4(x-3)=2(x^2-2x+1)=2(x-1)^2$

$x-3=\frac{2(x-1)^2}{x^4}>0$

1 NÃO É RAIZ, $P(1)=-2$

$x>3 \rightarrow$ NÃO HÁ RAÍZES REAIS NEGATIVAS

B

(13) $2^x+2^{-x}=2k \quad (\cdot 2^x)$

$2^{2x}+1=2k\cdot 2^x \quad \therefore y=2^x>0$

$y^2-2ky+1=0 \therefore y=\frac{2k\pm\sqrt{4k^2-4}}{2}$

$y=k\pm\sqrt{k^2-1}$ ∴ PARA y REAL

$k^2-1\geq 0$ ∴ + | − | + (−1, 1)

$k\leq -1$ OU $k\geq 1 \rightarrow |k|\geq 1$

E

(14) $g(f(x))=g(x^2+1)=(x^2+1)-1=x^2$

$g\cdot f(y-1)=(y-1)^2=y^2-2y+1$

A

(15) $C=\{0,1,2,\dots,10\}$

SUPREMO = MENOR LIMITE SUPERIOR

10 É MAIOR QUE OU IGUAL A QUALQUER ELEMENTO DE C

SEJA $L'=9{,}9<L=10 \rightarrow x'=10$

E $x'>L'$ $(10>9{,}9)$.

$L=10$

B

(16) $C: P(x) = a(x-1)(x-2)$

$D: P(x) = 0$ (NÃO É POSSÍVEL POLINÔMIO DE GRAU 2 TER 3 RAÍZES)

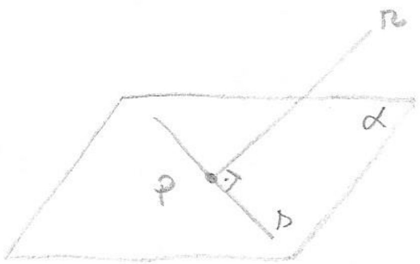
SE $a=0$, $P(x)=0 \in C$

ENTÃO $D \subset C$

ESTÁ CONTIDO

D

(17)



EXISTE UMA E SOMENTE UMA RETA $s \in \alpha$

TAL QUE $s \perp r$ E $P \in s$

B

(18) $C_1: \begin{cases} 4x+12y=4 & (I) \\ x+3y=1 & (II) \times 4 = (I) \end{cases}$

INFINITAS SOLUÇÕES $\left(x, \frac{1-x}{3}\right)$

$C2: \begin{cases} x+y=8 & (I) \times 2 = (II) \\ 2x+2y=16 & (II) \end{cases}$

INFINITAS SOLUÇÕES $(x, 8-x)$

INTERSEÇÃO: $\frac{1-x}{3} = 8-x \therefore 1-x = 24-3x$

$2x=23 \therefore x = \frac{23}{2} \therefore y = 8-x = 8-\frac{23}{2} = \frac{-7}{2}$

$C_1 \neq C_2 \therefore C_1 \not\subset C_2 \therefore C_2 \not\subset C_1$

$C_1 \cap C_2 = (23/2, -7/2)$

NENHUMA AFIRMAÇÃO É VERDADEIRA

E

(19) $P(x) = Ax^3+Bx^2+Cx+D$

CUBO PERFEITO $\rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x$

$x_1+x_2+x_3 = -\frac{B}{A} \therefore x = -\frac{B}{3A}$

$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = \frac{C}{A} \therefore x^2 = \frac{C}{3A}$

$x_1x_2x_3 = -\frac{D}{A} \therefore x^3 = -\frac{D}{A}$

$\frac{C}{3A} = \frac{B^2}{3A \cdot 3A} \therefore C = \frac{B^2}{3A}$

$-\frac{D}{A} = \frac{-B^3}{27A^3} \therefore D = \frac{B^3}{27A^2}$

D

(20)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a & 4 \\ -5 & 1 & 3 \\ b & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & a & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{60+3ab+5a-4b}{3+6a-12+27-8-a}$$

SISTEMA IMPOSSÍVEL $\begin{cases} \text{NUMERADOR} \neq 0 \\ \text{DENOMINADOR} = 0 \end{cases}$

$5a+10=0 \therefore a=-2$

$60-6b-10-4b \neq 0$

$10b \neq 50 \therefore b \neq 5$

C

ITA - MAT - 1969

BOTELHO

(continuação)

(21) $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$(x-1)(x^2+x+1)+(1-x)(x^2+x+1)=0$

$0=0$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=0$ //

E//

(22) $\log_{x+1}(y-2)>0$

CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA

$y-2>0 \therefore y>2$

$x+1>0 \therefore x>-1$

$x+1 \neq 1 \therefore x \neq 0$

PARA LOGARITMO >0

SE $0<$ BASE <1, ENTÃO $0<$ LOGARITMANDO <1

$0<x+1<1$ E $0<y-2<1$

$-1<x<0$ E $2<y<3$ //

SE BASE >1, ENTÃO LOGARITMANDO >1

$x+1>1$ E $y-2>1$

$x>0$ E $y>3$ //

C//

(23) $C_{15,x-1}=C_{15,2x+1}$

$C_{\underset{15}{m},\underset{x-1}{p}}=\dfrac{m!}{(m-p)!\,p!}=C_{\underset{15}{m},\underset{2x+1}{m-p}}$

$p+m-p=m=15$

$x-1+2x+1=15 \therefore 3x=15 \therefore x=5$ //

E//

(24) A) $X\cdot X=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}X_{11}^2+X_{12}X_{21} & X_{11}X_{12}+X_{12}X_{22}\\ X_{21}X_{11}+X_{22}X_{21} & X_{21}X_{12}+X_{22}^2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}X_{11}^2 & X_{12}^2\\ X_{21}^2 & X_{22}^2\end{pmatrix}$

ERRADA//

B) $\det(\alpha X)=\det\begin{pmatrix}\alpha X_{11} & \alpha X_{12}\\ \alpha X_{21} & \alpha X_{22}\end{pmatrix}=\alpha^2\underbrace{(X_{11}X_{22}-X_{12}X_{21})}_{\det X}$

ERRADA//

C) $\det(X+Y)=\det\begin{pmatrix}X_{11}+Y_{11} & X_{12}+Y_{12}\\ X_{21}+Y_{21} & X_{22}+Y_{22}\end{pmatrix}=$

$=(X_{11}+Y_{11})(X_{22}+Y_{22})-(X_{21}+Y_{21})(X_{12}+Y_{12})=$

$=X_{11}X_{22}+X_{11}Y_{22}+X_{22}Y_{11}+Y_{11}Y_{22}-X_{12}X_{21}-X_{12}Y_{21}-$

$-X_{21}Y_{12}-Y_{12}Y_{21}$

$\det X=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}=X_{11}X_{22}-X_{12}X_{21}$

$\det Y=\begin{pmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{pmatrix}=Y_{11}Y_{22}-Y_{12}Y_{21}$

$\det(X+Y)\neq\det X+\det Y$

ERRADA//

(continua...)

D) VIMOS NA LETRA B QUE $\det(\alpha X) = \alpha^2 \det X$

CERTA //

E) $\det(X \cdot Y) = \det\begin{pmatrix} X_{11}Y_{11}+X_{12}Y_{21} & X_{11}Y_{12}+X_{12}Y_{22} \\ X_{21}Y_{11}+X_{22}Y_{21} & X_{21}Y_{12}+X_{22}Y_{22} \end{pmatrix} =$

$= (X_{11}Y_{11}+X_{12}Y_{21})(X_{21}Y_{12}+X_{22}Y_{22}) -$

$- (X_{21}Y_{11}+X_{22}Y_{21})(X_{11}Y_{12}+X_{12}Y_{22}) =$

$= \cancel{X_{11}X_{21}Y_{11}Y_{12}} + X_{11}X_{22}Y_{11}Y_{22} + X_{12}X_{21}Y_{12}Y_{21} +$

$+ \cancel{X_{12}X_{22}Y_{21}Y_{22}} - \cancel{X_{11}X_{21}Y_{11}Y_{12}} - X_{12}X_{21}Y_{11}Y_{22} -$

$- X_{11}X_{22}Y_{12}Y_{21} - \cancel{X_{12}X_{22}Y_{21}Y_{22}} =$

$= X_{11}X_{22}(Y_{11}Y_{22}-Y_{12}Y_{21}) - X_{12}X_{21}(Y_{11}Y_{22}-Y_{12}Y_{21}) =$

$= (X_{11}X_{22}-X_{12}X_{21})(Y_{11}Y_{22}-Y_{12}Y_{21}) = \det X \cdot \det Y$

VIMOS NA LETRA C QUE $\det X + \det Y =$

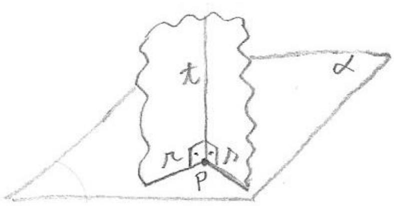
$= X_{11}X_{22} + X_{11}Y_{22} + X_{22}Y_{11} + Y_{11}Y_{22} - X_{12}X_{21} -$

$- X_{12}Y_{21} - X_{21}Y_{12} - Y_{12}Y_{21} \neq \det X \cdot \det Y$

ERRADA //

D //

25



α = PLANO DA MESA

P = PONTO DADO

AS RETAS r E s SÃO CONCORRENTES EM P E PERTENCEM A α

A RETA t É PERPENDICULAR A r E A s EM P

LOGO, t É PERPENDICULAR A α //

C //