MINISTÉRIO DA AERONÁUTICA
CENTRO TÉCNICO DE AERONÁUTICA
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

CONCURSO DE ADMISSÃO - 1968

EXAME DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. A prova de Matemática consta de 25 questões de Múltipla Escôlha.
2. A duração da prova é de 3 horas e 45 minutos.
3. Só há uma resposta certa em cada questão.
4. NÃO DEIXE DE RESPONDER NENHUMA QUESTÃO. QUANDO EM DÚVIDA, ASSINALE A RESPOSTA QUE LHE PARECER MAIS CORRETA.
5. Questões não respondidas ocasionam rejeição do cartão pelo computador, podendo prejudicar o candidato.
6. Não escreva no caderno de questões.
7. Assinale com um traço curto e forte de lápis o espaço correspondente a cada questão, na fôlha de respostas.
8. Verificando algum engano nas respostas poderá corrigí-la usando borracha.
9. Observe cuidadosamente o número das questões ao respondê-las.
10. O agente fiscal fornecerá papel para rascunho, o qual não será considerado na correção da prova.
11. Não será permitido o uso de tabelas, régua de cálculo, apontamentos, formulários e outros papéis a não ser os fornecidos pelo fiscal.
12. O caderno de questões contém 5 páginas numeradas de 2 a 6.

1. Se $a < 0$, a expressão $a^{\log_a x}$ é igual a:

A) 1.
B) a.
C) 0.
D) 10
E) Nenhuma das respostas anteriores.

2. Sejam $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 1$. Então $\log_b x \cdot \log_a b$ é igual a

A) 1.
B) x.
C) b.
D) $\log_a x$
E) Nenhuma das respostas anteriores.

3. Dada a progressão geométrica: $:1: \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \ldots$ o limite da soma dos têrmos da P.G. é

A) $\frac{1}{2^5}$.
B) 2.
C) $1 + \frac{1}{2^n}$.
D) 3/2.
E) 3.

4. Dado um número real $m > 0$, existem um polígono regular circunscrito e um polígono regular inscrito numa mesma circunferência, tais que a diferença entre seus perímetros é menor do que m. A afirmação acima é verdadeira quando:

A) $m > 0$ e arbitrário.
B) $m > 1$.
C) m depende do raio da circunferência.
D) Necessàriamente $m > 0$ e arbitràriamente pequeno.
E) Nenhuma das respostas anteriores.

5. Dado um triângulo de lados $a = 3$ cm, $b = 4$ cm e $c = 6$ cm a projeção do lado a sôbre o lado c é:

A) $2\frac{5}{13}$ cm.
B) $2\frac{7}{12}$ cm.
C) $\frac{29}{12}$ cm.
D) 0.
E) $2\frac{1}{2}$ cm.

6. Existe o triângulo ABC tal que $a = 10$ cm, $b = 4$ cm, $\beta = 30°$, onde β é o ângulo oposto ao lado b? Em caso afirmativo, o lado c vale:

A) 8 cm.
B) 7 cm.
C) 9 cm.
D) 11 cm.
E) Não existe tal triângulo.

7. Uma esfera é colocada no interior de um vaso cônico com $\sqrt{55}$ cm de geratriz e $\sqrt{30}$ cm de altura. Sabendo-se que os pontos de tangencia estão a 3 cm do vértice, o raio da esfera vale:

A) $2\sqrt{30}$ cm.
B) $\frac{\sqrt{35}}{2}$ cm.
C) $\frac{\sqrt{30}}{2}$ cm.
D) 3 cm.
E) Nenhuma das respostas anteriores.

8. Todo polígono convexo inscrito numa circunferência de raio R tem:

A) O perímetro igual a πR^2.
B) O perímetro menor que π R.
C) O perímetro menor que 8 R.
D) O perímetro igual a 6 R.
E) Nenhuma das respostas anteriores.

9. A função $x = \text{arcsen } y$ é univocamente determinada para:

A) $0 \leq x \leq \pi$
B) $0 < x \leq 2\pi$
C) $-\pi \leq x \leq \pi$
D) $0 \leq x \leq 2k\pi$, $k = 1, 2, 3, \ldots$
E) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

10. Se $m \neq -1$, $y = \text{arcsen } \frac{m-1}{m+1}$ é igual a:

A) $\text{arc cos } \frac{m-1}{m+1}$.
B) $\text{arc tg } \frac{m}{1+m^2}$.
C) $\text{arc cos } \frac{2\sqrt{m}}{m+1}$.
D) $\text{arc sen } \left(1 - \left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2\right)$.
E) Nenhuma das respostas acima.

11. A equação $3x^5 - x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$ possue:

A) Três raizes complexas e duas raizes reais.
B) Pelo menos uma raíz real positiva.
C) Tôdas raizes inteiras.
D) Uma raiz complexa.
E) Nenhuma das respostas anteriores.

12. Para que a equação $2x^4 + bx^3 - bx - 2 = 0$ tenha quatro soluções reais e distintas, devemos ter:

A) b um número real qualquer.
B) $b = 0$.
C) $b > 0$.
D) $b < -1$.
E) $b > 4$.

13. Sejam a e b dois números reais, $a > 0$ e $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Que relação devem satisfazer a e b para que a equação $x^2 - x(\log_b a) + 2\log_a b = 0$ tenha duas raizes reais e iguais?

A) $a = b^2$.
B) $a = b$.
C) $a^2 = b$.
D) $a = 2b$.
E) $b = 2a$.

14. Quais os valores de x que satisfazem a equação $\cos x - \cos\frac{x}{2} = 2$.

A) $\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
B) $x = K\pi$, K inteiro qualquer.
C) $x = (K+1)\pi$, K inteiro qualquer.
D) $x = (2K+2)\pi$, K inteiro qualquer.
E) $x = (4K+2)\pi$, K inteiro qualquer.

15. Para que valores do número real a, podemos garantir que existe sen 2x, sabendo-se que $\cos^4 x - \sin^4 x = a$.

A) $a > 1$.
B) $a \leq 0$.
C) $0 \leq a \leq 1$.
D) $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$.
E) $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$.

16. Sejam a e b dois números reais quaisquer e p um número primo. A igualdade $(a \pm b)^p = a^p \pm b^p$ é verificada se:

p=0

A) $a = b = 1$.
B) a e b são primos entre si.
C) $b = p.a$.
D) $x.p = 0$ para todo número real x.
E) Nenhuma das respostas acima.

17. Dizemos que os polinômios $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são linearmente independentes se a relação $a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + a_3p_3(x) = 0$ implica $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ (onde a_1, a_2 e a_3 são números reais). Caso contrário, dizemos que $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são linearmente dependentes. Os polinômios $p_1(x) = x^2 + 2x + 1$, $p_2(x) = x^2 + 1$ e $p_3(x) = x^2 + 2x + 2$ são:

A) Linearmente independentes.
B) Nem linearmente independentes nem linearmente dependentes.
C) Linearmente independentes se $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ tiverem as raizes reais.
D) Linearmente dependentes.
E) Nenhuma das respostas acima.

18. Seja
$$\begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \\ y + \lambda z = 0 \end{cases}$$
O sistema acima terá solução não trivial para um certo conjunto de valores de λ. Para que isto se verifique êste conjunto é constituido:

A) Apenas por números complexos não reais.
B) Apenas por números reais.
C) Apenas por números racionais.
D) Apenas por números irracionais.
E) Apenas por números inteiros.

19. Seja $y = a^{\log \operatorname{tg} x}$ com $0 < a < 1$, onde log u indica o logarítimo neperiano de u. Então, $\log y \geq 0$ se:

A) $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ e $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$.

B) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ e $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

C) $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$ e $\pi < x \leq \frac{5\pi}{4}$.

D) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ e $\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$.

E) $0 < x \leq \frac{3\pi}{2}$.

20. Dadas duas retas concorrentes a e b e dado um ponto M, fora do plano determinado por a e b, consideremos os pontos E e F, simétricos de M em relação às retas a e b, respectivamente. A reta que une os pontos E e F é:

A) Perpendicular ao plano determinado por a e b.
B) Paralela ao plano determinado por a e b.
C) Oblíqua ao plano determinado por a e b.
D) Pertencente ao plano determinado por a e b.
E) Nenhuma das respostas anteriores.

21. Consideremos um conjunto de retas paralelas no plano, distanciadas entre si de uma distância d. Uma agulha de comprimento a, onde $a < d$, é jogada sôbre o conjunto de retas paralelas. Pelo ponto médio da agulha traçamos uma perpendicular à reta mais próxima, que forma com a agulha, um ângulo θ. Seja x a distância do ponto médio da agulha à reta mais próxima. Em qual dos seguintes casos, podemos assegurar que a agulha intercepta alguma reta do conjunto?

A) $x \geq 2a \operatorname{sen} \theta$.
B) $x \leq \frac{a}{2} \cos \theta$.
C) $x \leq a \operatorname{sen} \theta \cos \theta$.
D) $x \geq a^2 \operatorname{sen} \theta$.
E) Nenhuma das respostas anteriores.

22. O campo de definição e o campo de variação da função $y = \log_{10} x$ são respectivamente:

A) O conjunto dos números racionais e o conjunto dos números reais.
B) O conjunto dos números naturais e o conjunto dos números racionais.
C) O conjunto dos números reais e o conjunto dos números reais.
D) O conjunto dos números reais estritamente positivos e o conjunto dos números reais.
E) O conjunto dos números reais diferentes de zero e o conjunto dos números reais.

23. Suponhamos que os polinômios P(x), Q(x), p(x) e q(x) satisfazem as seguintes condições:

$$P(x) \cdot p(x) + q(x) \cdot Q(x) = 1 \text{ para todo } x \text{ complexo},$$
$$P(p(1)) = 0,\ Q(0) = 0.$$

Assinale a afirmação correta:

A) P(x) é divisível por $S(x) = x$.
B) P(x) e Q(x) não são primos entre si.
C) $Q((p(1)) = 0$
D) p(x) não é divisível por $R(x) = x - 1$.
E) $p(0) = 0$.

24. O valor absoluto de um número y é menor ou igual que tôdas as soluções positivas da equação

$$(1 - x) + x(1 - x) = 1 - x^2$$

Assinale a afirmação correta:

A) $y = -\frac{1}{2}$.
B) $y = -1$.
C) $-3 \leq y \leq 3$.
D) $y = \frac{1}{2}$.
E) Nenhuma das afirmações acima.

25. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais.

A expressão $(a_1 + a_2 + \ldots a_n)^2$ é igual a:

A) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 4 \sum_{j=1}^{n} a_j$.

B) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_i \, a_j \right)$.

C) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \left(\frac{n}{2} \right) \sum_{j=1}^{n} a_j$.

D) $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_i \; a_j \right)$.

E) Nenhuma das respostas anteriores.

ITA – MAT – 1968

BOTELHO

(1) A BASE DE UM LOGARITMO DEVE SER UM NÚMERO POSITIVO DIFERENTE DE 1

EM $a^{\log_a x}$, NÃO PODEMOS TER $a<0$

NÃO SE DEFINE!!!

OBS.: SE a FOSSE MAIOR QUE 0 E $\neq 1$

$$y = a^{\log_a x} \therefore \log_a y = \log_a x \cdot \underbrace{\log_a a}_{1}$$

$$y = x$$

DE QUALQUER MODO, NENHUMA DAS RESPOSTAS ANTERIORES É CORRETA

E//

(2) OBS.: A QUESTÃO, DE INÍCIO, CONFIRMA AS CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA DA BASE DE UM LOGARITMO COBRADAS NA QUESTÃO ANTERIOR

(BASE >0 E $\neq 1$)

$$\log_b x \cdot \log_a b = \frac{\log x}{\log b} \cdot \frac{\log b}{\log a} = \frac{\log x}{\log a} = \log_a x$$ //

D//

(3) $PG = a_0, a_0q, a_0q^2 \ldots$

$$S = a_0 + a_0q + a_0q^2 + \ldots$$

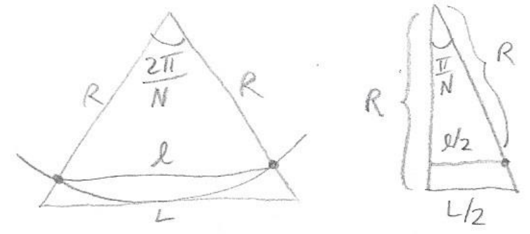
$$qS = \quad a_0q + a_0q^2 + \ldots \quad (-)$$

$$S(1-q) = a_0$$

$$S = \frac{a_0}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$ //

B//

(4)



$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{N} = \frac{\ell/2}{R} \therefore \ell = 2R\operatorname{sen}\frac{\pi}{N}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{N} = \frac{L/2}{R} \therefore L = 2R\operatorname{tg}\frac{\pi}{N} \therefore L \geq \ell$$

$$2p = 2R \cdot N\operatorname{sen}\frac{\pi}{N}$$

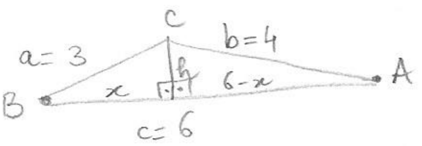
$$2P = 2R \cdot N\operatorname{tg}\frac{\pi}{N}$$

$$2P - 2p = 2RN\operatorname{sen}\frac{\pi}{N}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{N}} - 1\right)$$

$\lim_{N\to\infty} = 0 \therefore m > 0$ E TÃO PEQUENO QUANTO SE QUEIRA //

D//

(5)

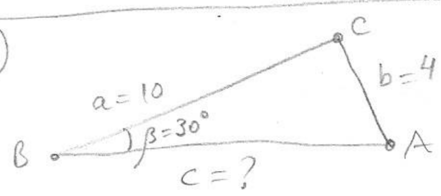


$$x^2 + h^2 = 9$$
$$(6-x)^2 + h^2 = 16 \quad (-)$$

$$(6-x)^2 - x^2 = 7$$
$$(6-x+x)(6-x-x) = 7$$
$$36 - 12x = 7$$
$$x = \frac{29}{12}$$ //

C//

(6)



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$16 = 100 + c^2 - 20c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c^2 - 10\sqrt{3}\,c + 84 = 0$$

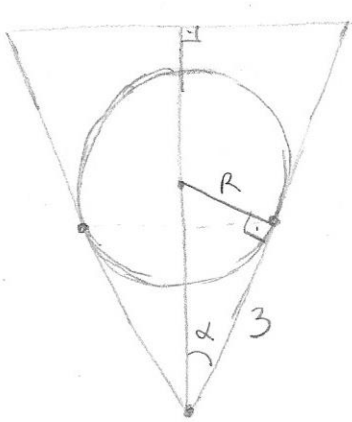
$$c = \frac{10\sqrt{3} \pm \sqrt{300 - 4 \cdot 84}}{2} \quad \therefore \Delta < 0$$

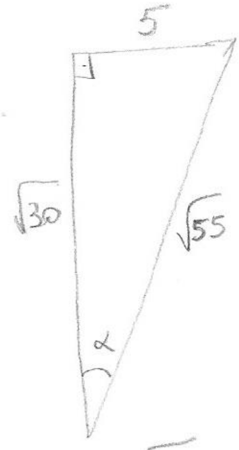
$$\begin{array}{r} 84 \\ \times 4 \\ \hline 336 \end{array}$$

C NÃO É REAL $\therefore$ NÃO EXISTE TAL TRIÂNGULO //

E//

7





$tg\,\alpha = \frac{R}{3}$ $\qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{55}}$

$sen\,\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{30}{55}} = \sqrt{\frac{25}{55}} = \frac{5}{\sqrt{55}}$

$tg\,\alpha = \frac{R}{3} = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{\sqrt{30}}$

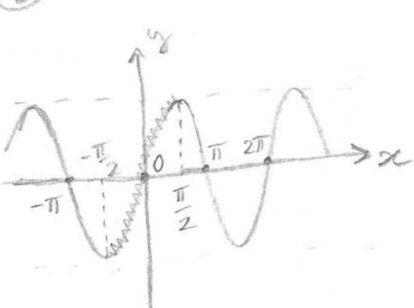
$R = \frac{15}{\sqrt{30}} = \frac{15\sqrt{30}}{30} = \frac{\sqrt{30}}{2}$ // $\qquad$ C //

8 OBS.: A QUESTÃO NÃO FALA QUE O POLÍGONO É REGULAR

NO CASO LIMITE, O PERÍMETRO DO POLÍGONO TENDE A COINCIDIR COM A CIRCUNFERÊNCIA

$2p < \underbrace{2\pi}_{6{,}28} R < 8R$ // $\qquad$ C //

9 $x = arc\,sen\,y \;\therefore\; y = sen\,x$



PARA QUE y NÃO SE REPITA:

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ //

$\downarrow \qquad \downarrow$

$-1 \leq y \leq 1$

E //

10 $y = arc\,sen\,\frac{m-1}{m+1}$

$sen\,y = \frac{m-1}{m+1}$

$\cos y = \sqrt{1-sen^2 y} = \sqrt{1-\frac{m^2-2m+1}{m^2+2m+1}} =$

$= \sqrt{\frac{m^2+2m+1-m^2+2m-1}{(m+1)^2}} = \frac{2\sqrt{m}}{m+1}$

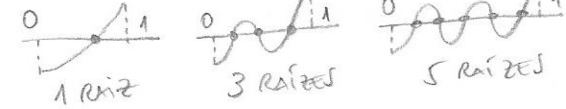
$y = arc\,\cos\frac{2\sqrt{m}}{m+1}$ // $\qquad$ C //

11 A EQUAÇÃO PODE TER, NO MÁXIMO, DOIS PARES DE RAÍZES COMPLEXAS CONJUGADAS ($a \pm bi$ E $c \pm di$). PELO MENOS UMA RAIZ É REAL.

MAS $P(0) = -1$

$P(1) = 3-1+2+1-1 = 4$

PELO TEOREMA DE BOLZANO, HÁ UM NÚMERO ÍMPAR DE RAÍZES REAIS ENTRE 0 E 1



LOGO, HÁ PELO MENOS UMA RAIZ REAL POSITIVA //

B //

12 EQUAÇÃO RECÍPROCA DE 2ª ESPÉCIE (COEFICIENTES EQUIDISTANTES SIMÉTRICOS) E 4º GRAU

1 É RAIZ PORQUE $2+b-b-2=0$

-1 É RAIZ PORQUE $2-b+b-2=0$

BRIOT-RUFFINI

	2	b	0	−b	−2
1	2	2+b	2+b	2	0
−1	2	b	2	0	

$2x^2+bx+2=0 \;\therefore\; x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot2\cdot2}}{4}$

PARA SOLUÇÕES REAIS DISTINTAS $\rightarrow b^2-16>0$

$b<-4$ OU $b>4$ //

E //

2

ITA — MAT — 1968

BOTELHO
(continuação)

(13) PARA QUE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU TENHA RAÍZES REAIS E IGUAIS, $\Delta = 0$

$$\Delta = \left(\log_b a\right)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \log_a b = 0$$

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

SEJA $y = \log_b a \therefore y^2 - \frac{8}{y} = 0$

$$y^2 = \frac{8}{y} \therefore y^3 = 8 \therefore y = 2$$

$\log_b a = 2 \therefore a = b^2$ // A //

(14) $\cos x - \cos \frac{x}{2} = 2$

$$\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$2\cos^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} - 3 = 0$$

SEJA $y = \cos \frac{x}{2} \therefore 2y^2 - y - 3 = 0$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \begin{cases} \frac{6}{4} \text{ NÃO} \\ -1 \text{ ok} \end{cases}$$

$\cos \frac{x}{2} = -1 \quad \therefore \frac{x}{2} = (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$x = (4k+2)\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ //

E //

(15) $\cos^4 x - \sin^4 x = a$

$$\underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{1} \underbrace{(\cos^2 x - \sin^2 x)}_{\cos 2x} = a$$

$\sin 2x$ EXISTE SE E SÓ SE EXISTE $\cos 2x$

LOGO, $-1 \leq a \leq 1 \rightarrow$ SEM RESPOSTA //

OBS.: PROVAVELMENTE O CORRETO ERA

$$\cos^4 x + \sin^4 x = a$$

$$\cos^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^2 x \cdot \sin^2 x = a$$

$$\cos^2 x (1 - \sin^2 x) + \sin^2 x \cdot (1 - \cos^2 x) = a$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x = a$$

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} - 2\sin^2 x \cos^2 x = a$$

$$1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = a$$

$$\sin^2 2x = 2 - 2a$$

SE $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$ ENTÃO $0 \leq 2 - 2a \leq 1$

$$0 \leq 2 - 2a \therefore 2a \leq 2 \therefore a \leq 1$$

$$2 - 2a \leq 1 \therefore 2a \geq 1 \therefore a \geq \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ //

D //

(16) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

SÓ É IGUAL A $a^2 + b^2$ SE $ab = 0$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

SÓ É IGUAL A $a^3 \pm b^3$ SE $\pm 3a^2b + 3ab^2 = 0$

ISTO É, $ab = 0$ OU $\pm a + b = 0$

NENHUMA DAS RESPOSTAS //

E //

(17) $a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x) = 0$

$a_1(x^2+2x+1) + a_2(x^2+1) + a_3(x^2+2x+2) = 0$

$(a_1+a_2+a_3)x^2 + (2a_1+2a_3)x + (a_1+a_2+2a_3) = 0$

$a_1 + a_2 + a_3 = 0 \quad (I)$

$2a_1 \quad + 2a_3 = 0 \quad (II)$

$a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \quad (III)$

$(III) - (I): \; a_3 = 0$

$(II): \; a_1 = -a_3 = 0$

$(I): \; a_2 = -a_1 - a_3 = 0$

LINEARMENTE INDEPENDENTES //

OBS.: ISSO SIGNIFICA QUE NENHUM DOS POLINÔMIOS É COMBINAÇÃO LINEAR DOS DOIS OUTROS

A //

(18)
$$\begin{cases} \lambda x + 1y + 0z = 0 \\ 1x + \lambda y + 1z = 0 \\ 0x + 1y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}} = \frac{0}{\lambda^3 - \lambda - \lambda} = \frac{0}{\lambda^3 - 2\lambda}$$

HAVERÁ INDETERMINAÇÃO (INFINITAS SOLUÇÕES) QUANDO $x = \frac{0}{0}$, ISTO É, QUANDO $\lambda^3 - 2\lambda = 0$

$\lambda^3 - 2\lambda = \lambda(\lambda^2 - 2) = 0$

$\lambda = 0, \; \lambda = \sqrt{2}$ OU $\lambda = -\sqrt{2}$

O CONJUNTO DE VALORES DE λ É CONSTITUÍDO APENAS POR NÚMEROS REAIS //

B //

(19) $y = a^{\log \operatorname{tg} x}$

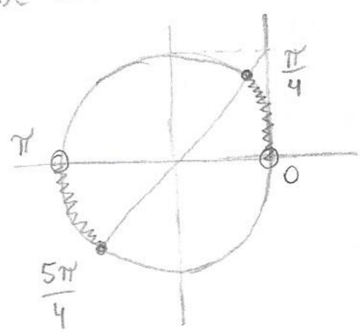
$\log y = \log \operatorname{tg} x \cdot \log a$

QUERO ≥ 0

< 0 PORQUE $0 < a < 1$

ENTÃO, $\log \operatorname{tg} x \leq 0 \rightarrow 0 < \operatorname{tg} x \leq 1$

COMO $\operatorname{tg} x$ É ARGUMENTO DE $\log$, SÓ PODE SER POSITIVA



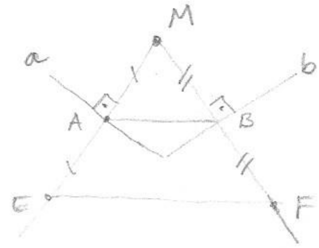
$0 < x \leq \frac{\pi}{4}$

OU

$\pi < x \leq \frac{5\pi}{4}$ //

C //

(20)



$\alpha = (a, b)$

$AB \in \alpha$

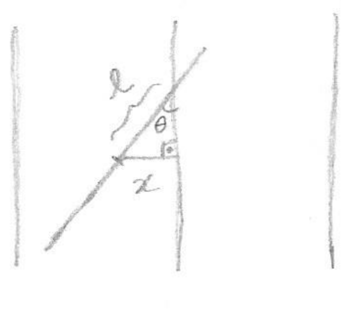
$EF \parallel AB$

$EF \parallel \alpha$

A RETA É PARALELA AO PLANO //

B //

(21) PROBLEMA DAS AGULHAS DE BUFFON



$\operatorname{sen} \theta = \frac{x}{\ell} \;\therefore\; x = \ell \operatorname{sen} \theta$

PARA HAVER INTERSEÇÃO, $\ell \leq \frac{a}{2}$

$x \leq \frac{a}{2} \operatorname{sen} \theta$ //

E //

ITA - MAT - 1968

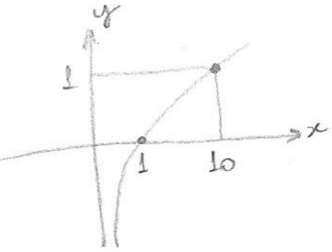
BOTELHO
(continuação)

(22) CAMPO DE DEFINIÇÃO = DOMÍNIO

CAMPO DE VARIAÇÃO = IMAGEM

$y = \log_{10} x$

$x \in \mathbb{R}_+^* \therefore y \in \mathbb{R}$ //



D //

(23) $P(x) \cdot p(x) + Q(x) \cdot q(x) = 1$

SE $x = 0 \rightarrow P(0) \cdot p(0) + \underbrace{Q(0)}_{0} \cdot q(0) = 1$

$P(0) \cdot p(0) = 1 \therefore p(0) \neq 0$ ("E" ERRADA)

$p(0) \neq 0$, LOGO NÃO É DIVISÍVEL POR $S(x) = x$

("A" ERRADA)

SE $x = p(1) \rightarrow \underbrace{P(p(1))}_{0} \cdot p(p(1)) + Q(p(1)) \cdot q(p(1)) = 1$

$Q(p(1)) \cdot q(p(1)) = 1 \therefore Q(p(1)) \neq 0$ ("C" ERRADA)

VAMOS SUPOR QUE $P(x)$ E $Q(x)$ NÃO SEJAM PRIMOS → HAVERIA UM $D(x)$ COMUM TAL QUE

$P(x) = P'(x) \cdot D(x)$ E $Q(x) = Q'(x) \cdot D(x)$

DAÍ $P'(x) \cdot D(x) \cdot p(x) + Q'(x) \cdot D(x) \cdot q(x) = 1$

$D(x) \left[P'(x) \cdot p(x) + Q'(x) \cdot q(x) \right] = 1$

$D(x) = 1 \rightarrow P(x)$ E $Q(x)$ SÃO PRIMOS

("B" ERRADA)

VIMOS QUE $P(0) \neq 0$ E $P(p(1)) = 0$

SE $p(1)$ FOSSE 0, $P(p(1)) \neq 0$ (ABSURDO)

LOGO, $p(1) \neq 0 \rightarrow 1$ NÃO É RAIZ DE $p(x)$

$p(x)$ NÃO É DIVISÍVEL POR $R(x) = x - 1$ //

D //

(24) $|y| \leq$ soluções positivas

$(1-x) + x(1-x) = 1 - x^2$

$1 - x + x - x^2 = 1 - x^2$

$1 - x^2 = 1 - x^2$

QUALQUER $x > 0$ É SOLUÇÃO POSITIVA PARA QUE $|y|$ SEJA MENOR QUE OU IGUAL A TODO x POSITIVO, $y = 0$ //

MAS, SE $y = 0$, ENTÃO $-3 \leq y \leq 3$ ...

C //

(25) $(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^2 =$

$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) =$

= SOMA DE TODOS OS PARES $a_i a_j \begin{cases} i = 1 \ldots m \\ j = 1 \ldots m \end{cases}$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} a_i a_j \right) //$$

$i = 1 \rightarrow a_1 a_1 \quad a_1 a_2 \ldots a_1 a_m$

$i = 2 \rightarrow a_2 a_1 \quad a_2 a_2 \ldots a_2 a_m$

$i = m \rightarrow a_m a_1 \quad a_m a_2 \ldots a_m a_m$

D //