MINISTÉRIO DA AERONÁUTICA
CENTRO TÉCNICO DE AERONÁUTICA
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

CONCURSO DE ADMISSÃO -1967-

EXAME DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. A prova de Matemática consta de 25 questões de Múltipla Escôlha.
2. A duração da prova é de 3 horas e 40 minutos.
3. Só há uma resposta certa em cada questão.
4. NÃO DEIXE DE RESPONDER NENHUMA QUESTÃO. QUANDO EM DÚVIDA, ASSINALE A RESPOSTA QUE LHE PARECER MAIS CORRETA.
5. Questões não respondidas ocasionam rejeição do cartão pelo computador, podendo prejudicar o candidato.
6. Não escreva no caderno de questões.
7. Assinale com um traço curto e forte de lápis o espaço correspondente a cada questão, na fôlha de respostas.
8. Verificando algum engano nas respostas poderá corrigí-lo usando borracha.
9. Observe cuidadosamente o número das questões ao respondê-las.
10. O agente fiscal fornecerá papel para rascunho, o qual não será considerado na correção da prova.
11. Não será permitido o uso de tabelas, régua de cálculo, apontamentos, formulários e outros papéis a não ser os fornecidos pelo fiscal.
12. O caderno de questões contém 5 páginas numeradas de 2 a 6.

T E S T E S

1. Sendo $\text{sen } x = -1$, então

A) $\text{sen } 2x = -2$
B) $\text{sen } 2x = 0$
C) $\text{sen } 2x = -1$
D) $\text{sen } 2x = 1$
E) $\text{sen } 2x = 2$

2. Transformando 12° em radianos obtemos

A) $12^\circ = \frac{\pi}{15}$ rd
B) $12^\circ = \frac{15}{\pi}$ rd
C) $12^\circ = \frac{\pi}{30}$ rd
D) $12^\circ = \frac{2\pi}{15}$ rd
E) $12^\circ = 12$ rd

3. $\text{sen}^2 x$ é igual a

A) $\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
B) $\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
C) $\frac{1}{2}(1 + \text{sen } 2x)$
D) $\frac{1}{2}(1 - \text{sen } 2x)$
E) $2 \text{ sen } x \cos x$

4. $\text{sen } x$ é igual a

A) $\dfrac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$
B) $\dfrac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$
C) $\dfrac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$
D) $\pm \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$
E) $\text{sen } \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

5. $\text{sen } 14^\circ + \text{sen } 18^\circ$ é igual a

A) $-2 \text{ sen } 2^\circ \cos 16^\circ$
B) $2 \text{ sen } 2^\circ \cos 16^\circ$
C) $2 \text{ sen } 16^\circ \cos 2^\circ$
D) $-2 \text{ sen } 16^\circ \cos 2^\circ$
E) $2 \cos 16^\circ \cos 2^\circ$

6. Se $a > 1$, $b > 1$ e $c > 1$ temos

A) $(\log_a b)(\log_b c) < \log_a c$
B) $(\log_a b)(\log_b c) = \log_a c$
C) $(\log_a b)(\log_b c) > \log_a c$
D) $\log_a b + \log_b c = \log_a c$
E) $(\log_a b)(\log_b c) = \dfrac{1}{\log_a c}$

7. $\log_a b > \log_a c$ se

A) $a > 1,\ b > 0,\ c > 0$
B) $a > 1,\ b < c < 0$
C) $a > 1,\ b > c > 0$
D) $a > 1,\ b > 1,\ c > 1$
E) $0 < a < 1,\ b > c$

8. Se $0 < c < 1$, então $\log_c b$ é igual a

A) $\log_b c$

B) $-\log_{\frac{1}{c}} b$

C) $\log_{\frac{1}{b}} c$

D) $-\log_b c$

E) $\dfrac{1}{\log_b c}$

9. Sejam o determinante $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ e A_1, A_2, A_3 respectivamente os complementos algébricos de c_1, c_2, c_3. Então $a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$ é igual a

A) D
B) $-D$
C) zero
D) D^{-1}
E) 1

10. O Sistema $\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ x + 7y + 9z = a \\ -x + 3y + z = 0 \end{cases}$

A) Não tem solução para qualquer a.
B) Sòmente tem solução para a = 1.
C) Tem solução para qualquer a.
D) Possue somente a solução $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ para $a = 0$.
E) Tem solução diferente da solução $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ para $a = 0$.

11. É dada uma progressão geométrica com 1.000 têrmos; a razão dessa progressão é igual ao seu primeiro têrmo. A soma dos logaritmos neperianos dos têrmos dessa progressão é 1.001.000. O primeiro têrmo dessa progressão é

A) 2

B) 2^2

C) $e^{1/2}$

D) e^2

E) e

12. Uma progressão geométrica tem 1.000 têrmos. O primeiro têrmo é 4 e o último é o número cujo logaritmo decimal é $999 + \log_{10} 4$. A soma dos 100 primeiros têrmos dessa progressão é

A) $\dfrac{10^{100} - 1}{10 - 1}$

B) $10^{100} - 1$

C) $\frac{4}{9}\ (10^{100} - 1)$

D) $4\ (10^{100} - 109)$

E) $\frac{1}{9}\ (10^{100} - 1)$

13. A equação $a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$

A) Só admite uma raíz de multiplicidade 5.
B) Se tiver apenas 2 raizes de multiplicidade 1, existe uma raíz de multiplicidade 2.
C) Se tiver uma raíz de multiplicidade 3, tem duas raízes de multiplicidade 1.
D) Se tiver apenas 4 raízes distintas, uma delas tem multiplicidade 2.
E) Se tiver uma raíz real, tôdas serão reais.

14. A equação $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} = 0$ tem raizes

A) $\pm i$; $\frac{1 \pm 2\sqrt{2}\,i}{3}$
B) $2i \pm 3$, $\frac{7 \pm 3i}{2}$
C) $i \pm 1$, $\frac{2 \pm 2i}{3}$
D) $\pm i$, $\frac{1 \pm 5\sqrt{2}}{7}$
E) $\frac{1 \pm 3}{5}$, $\frac{2 \pm i}{2}$

15. Seja $y = (ax^2 - 2bx - (a + 2b))^{1/2}$.

Em qual dos casos abaixo y é real e diferente de zero?

A) $a > 0$, $b > 0$, $-1 < x < \frac{a + b}{a}$.
B) $a > 0$, $b < 0$, $x = \frac{a + 2b}{a}$.
C) $a > 0$, $b = 0$, $-1 < x < 1$.
D) $a < 0$, $b = 3a$, $x < -1$.
E) $a < 0$, $b = 2a$, $-1 < x < \frac{a + b}{a}$.

16. Um polinômio P(x) dividido por (x + 1) dá resto (-1), por (x - 1) dá resto 1 e por (x + 2) dá resto 1. Qual será o resto da divisão do polinômio por (x + 1) (x - 1) (x + 2)?

A) $x^2 - x + 1$.
B) $x + 1$.
C) $x^2 + x - 1$.
D) $x^2 - x - 1$.
E) Nenhum dos casos anteriores.

17. Um polinômio P(x) tem a propriedade P(x) = P(-x-1). Definindo um novo polinômio Q(x) = P(f(x)) obteremos Q(x) = Q(-x) quando f(x) fôr igual a:

A) $x - \frac{1}{2}$.
B) $x + \frac{1}{2}$.
C) $-x - 1$.
D) $x - 1$.
E) $-x + 1$.

18. Um polinômio $P(x)$, dividido por $x - 1$, dá resto 3. O quociente desta divisão é então dividido por $x - 2$, obtendo-se resto 2. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)(x - 2)$ será .

A) $3x + 2$.
B) $3x - 1$.
C) $2x + 1$.
D) $-x + 4$
E) Nenhum dos restos anteriores.

19. Em qual dos casos abaixo, vale a desigualdade

$$\frac{x^2 - ax - 2a^2}{x^2 - (a + 2)x + 2a} < 0$$

A) $a < 0$, $x < 2a$.
B) $a = 0$, $x > -a$.
C) $a > 2$, $2 < x < a$.
D) $a > 2$, $-a < x < 2$.
E) $a > 2$, $x > 2a$.

20. O lugar geométrico dos pontos equidistantes de três pontos, P,Q e R, não alinhados, é:

A) A circunferência por P, Q e R.
B) O triângulo PQR.
C) Elipse com fôco no ponto P.
D) A mediatriz do segmento PQ.
E) A reta perpendicular ao plano formado pelos três pontos, passando pelo centro do círculo definido por P, Q e R.

21. Seja dado um plano e um feixe de retas concorrentes pertencente ao plano. Qual o lugar geométrico dos pés das perpendiculares baixadas de um ponto fóra do plano, às retas do feixe?

A) Uma elipse com um dos fócos no centro do feixe.
B) Uma circunferência ou o centro do feixe.
C) Uma circunferência com centro no centro do feixe.
D) A reta que passa pelo centro do feixe e pelo pé da perpendicular do ponto ao plano.
E) Uma parábola.

22. Qual o lugar geométrico dos pontos, cuja soma das distâncias a duas retas que se cortam, é igual a uma dada constante K?

A) Um quadrilátero.
B) Uma circunferência.
C) Uma reta passando pelo ponto de interseção das retas.
D) Uma elipse.
E) Uma hipérbole.

23. Cortando-se uma pirâmide regular de altura h, com um plano paralelo à base, resulta uma segunda pirâmide. Se a razão entre as áreas das superfícies laterais das pirâmides for r, a que distância do vértice deve passar o plano?

A) $h^2 r$
B) $h\sqrt{r}$
C) $r\sqrt{h}$
D) $\frac{\sqrt{r}}{h}$
E) Nenhuma das respostas anteriores.

24. Qual é o coeficiente de x^{17} no desenvolvimento de

$$(1 + x^5 + x^7)^{20} ?$$

A) zero
B) 1.210
C) 3.000
D) 3.420
E) 4.000

25. $\sum_{k=0}^{10} 2^k \binom{10}{k}$ é igual a

A) 2^{10}
B) $2^{10} - 1$
C) $3^{10} - 1$
D) $3^{10} + 1$
E) 3^{10}

ITA - MAT - 1967

BOTELHO

(1)

$\operatorname{sen} x = -1 \quad \therefore \quad \cos x = 0$

$x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \therefore \quad 2x = 3\pi + 4k\pi$

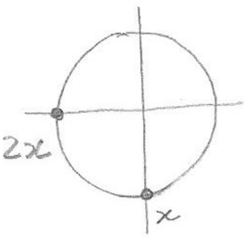
$\operatorname{sen} 2x = 0$

ou

$\operatorname{sen} 2x = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x =$

$= 2 \cdot (-1) \cdot 0 =$

$= 0$



B

---

(2)

$180° \;—\; \pi$

$12° \;—\; x$

$x = \dfrac{12\pi}{180} \quad (\div 12)$

$x = \dfrac{\pi}{15}$ rad

A

---

(3)

$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

$2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x$

$\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

B

---

(4)

$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\dfrac{x}{2} \cos\dfrac{x}{2} = 2 \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \cdot \cos^2\dfrac{x}{2} =$

$= 2 \cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = 2 \cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} =$

$= 2 \cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1} = \dfrac{2 \tan x/2}{1 + \tan^2 x/2}$

A

---

(5)

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$+ \quad \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$

$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen} a \cos b$

$\operatorname{sen} 18° + \operatorname{sen} 14° = 2 \operatorname{sen} 16° \cos 2°$

$a + b = 18° \qquad a = 16°$

$a - b = 14° \qquad b = 2°$

C

---

(6)

$\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a} \quad \therefore \quad \log_b c = \dfrac{\log c}{\log b}$

$(\log_a b)(\log_b c) = \dfrac{\log b}{\log a} \cdot \dfrac{\log c}{\log b} = \dfrac{\log c}{\log a} = \log_a c$

B

---

(7)

$\log_a b > \log_a c \quad \therefore \quad \log_a b - \log_a c > 0$

$\log_a b/c > 0$

$\log_y x > 0 \begin{cases} \text{se } 0 < y < 1 \text{ e } 0 < x < 1 & (\mathrm{I}) \\ \text{se } y > 1 \text{ e } x > 1 & (\mathrm{II}) \end{cases}$

$\mathrm{II} \to a > 1, \quad b/c > 1, \quad b > 0 \text{ e } c > 0$

$a > 1, \; b > c > 0$

C

---

(8)

$0 < c < 1$

$\log_c b = \dfrac{\log_b b}{\log_b c} = \dfrac{1}{\log_b c} \to E$

$\log_c b = \dfrac{\log_{1/c} b}{\log_{1/c} c} = -\log_{1/c} b \to B$

B e E

(9) COFATOR OU COMPLEMENTO ALGÉBRICO =

$= A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \text{MENOR COMPLEMENTAR}_{ij}$

$\text{MENOR COMPLEMENTAR}_{ij}$ = DETERMINANTE DA MATRIZ SEM LINHA i E COLUNA j

$c_1 = a_{31}$

$$A_1 = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - a_3b_2$$

$c_2 = a_{32}$

$$A_2 = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = -(a_1b_3 - a_3b_1)$$

$c_3 = a_{33}$

$$A_3 = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = \cancel{a_1a_2b_3} - \cancel{a_1a_3b_2} - \cancel{a_1a_2b_3} + \cancel{a_2a_3b_1} + \cancel{a_1a_3b_2} - \cancel{a_2a_3b_1} = 0$$

C

(10) POR INSPEÇÃO, VAMOS SOMAR O DOBRO DA EQUAÇÃO 1 COM A EQUAÇÃO 3:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 8z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} x + 7y + 9z = 0$$

COMPARANDO COM A EQUAÇÃO 2:

$x + 7y + 9z = a$

SE $a \neq 0 \rightarrow$ SISTEMA IMPOSSÍVEL

SE $a = 0 \rightarrow$ SISTEMA INDETERMINADO

PARA $a = 0$, UMA SOLUÇÃO É $x=0, y=0, z=0$, MAS HÁ INFINITAS OUTRAS, COMO $x=2, y=1, z=-1$

E

(11) $a_0, a_0q, a_0q^2, \ldots, a_0q^{999}$

$a_0 = q \rightarrow a_0, a_0^2, a_0^3, \ldots, a_0^{1000}$

$\ln a_0 + 2\ln a_0 + \ldots + 1000 \ln a_0 = 1\,001\,000$

$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$1 + 2 + \ldots + 1000 = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = \frac{1\,001\,000}{2}$

$\frac{1\,001\,000}{2} \ln a_0 = 1\,001\,000 \therefore \ln a_0 = 2$

$a_0 = e^2$ D

(12) $a_0, a_0q, a_0q^2, \ldots, a_0q^{999}$

$a_0 = 4 \therefore \log(a_0q^{999}) = 999 + \log 4$

$\log(a_0q^{999}) = \log a_0 + \log q^{999} = \underbrace{\log a_0}_{\log 4} + 999 \underbrace{\log q}_{1}$

$q = 10$

$$\begin{aligned} S_{100} &= a_0 + a_0q + \ldots + a_0q^{99} \\ \ominus \quad qS_{100} &= \phantom{a_0 +{}} a_0q + \ldots + a_0q^{99} + a_0q^{100} \end{aligned}$$

$S_{100} = \frac{a_0q^{100} - a_0}{q-1} = \frac{4(10^{100} - 1)}{9}$ C

(13) A → ERRADA, PORQUE PODE TER 5 RAÍZES DISTINTAS, POR EXEMPLO

B → ERRADA, PORQUE, SE SÓ TIVER 2 RAÍZES SIMPLES, SÓ TERÁ MAIS UMA RAIZ TRIPLA (a, b, c, c, c)

C → ERRADA, PORQUE, SE TIVER UMA RAIZ TRIPLA, PODERÁ TER 2 RAÍZES SIMPLES (a, a, a, b, c) OU UMA RAIZ DUPLA (a, a, a, b, b)

D → CERTA, PORQUE, SE SÓ TIVER 4 RAÍZES DISTINTAS, UMA TEM QUE SER DUPLA (a, b, c, d, d)

E → ERRADA, PORQUE, SE TIVER UMA RAIZ REAL, PODERÁ TER UM OU DOIS PARES DE RAÍZES COMPLEXAS CONJUGADAS: $(a, b \pm ci, d \pm ei)$ OU $(a, b, c, d \pm ei)$

D

ITA – MAT – 1967

BOTELHO

(continuação)

(14) $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} = 0$

É UMA EQUAÇÃO RECÍPROCA DE 1ª ESPÉCIE (COEFICIENTES EQUIDISTANTES IGUAIS) E GRAU PAR (4º GRAU)

$\div x^2 \rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + 1 - \frac{1}{3x} + \frac{1}{2x^2} = 0$

$\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$

SEJA $y = x + \frac{1}{x} \therefore y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

$\cdot 6 \rightarrow 3(y^2 - 2) - 2y + 6 = 0 \therefore 3y^2 - 2y = 0$

$y = 0 \rightarrow x + \frac{1}{x} = 0 \rightarrow x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm i$ //

$y = \frac{2}{3} \rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{2}{3} \rightarrow 3x^2 - 2x + 3 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot3\cdot3}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{-32}}{6} = \frac{1 \pm 2\sqrt{2}i}{3}$ //

A//

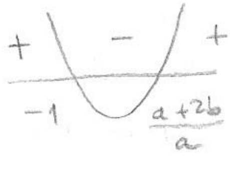
(15) PARA QUE y SEJA REAL E $\neq 0$:

$ax^2 - 2bx - (a+2b) > 0$

RAÍZES $\rightarrow x = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 + 4a(a+2b)}}{2a}$

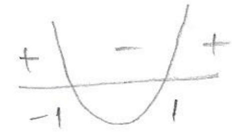
$x = \frac{b \pm (a+b)}{a}$ $\nearrow \frac{b+a+b}{a} = \frac{a+2b}{a}$; $\searrow \frac{b-a-b}{a} = -1$

A) ERRADA, PORQUE SE $a > 0$ E $b > 0$, ENTÃO $\frac{a+2b}{a} > 0$ E O TRECHO $-1 < x < \frac{a+b}{a} < \frac{a+2b}{a}$ É NEGATIVO



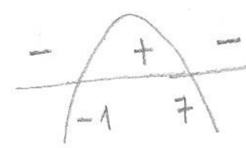
B) ERRADA, PORQUE SE $x = \frac{a+2b}{a}$, ENTÃO $y = 0$

C) ERRADA, PORQUE SE $a > 0$ E $b = 0$, ENTÃO $\frac{a+2b}{a} = 1$ E O TRECHO $-1 < x < 1$ É NEGATIVO



D) ERRADA, PORQUE SE $a < 0$ E $b = 3a$, ENTÃO $a = -|a|$, $b = -3|a|$, $x_1 = \frac{-|a| - 6|a|}{-|a|} = 7$

E O TRECHO $x < -1$ É NEGATIVO



E) CERTA, PORQUE SE $a < 0$ E $b = 2a$, ENTÃO $a = -|a|$, $b = -2|a|$, $x_1 = \frac{-|a| - 4|a|}{-|a|} = 5$,

$\frac{a+b}{a} = \frac{-|a| - 2|a|}{-|a|} = 3$ E O TRECHO $-1 < x < \underbrace{\frac{a+b}{a}}_{3}$ É POSITIVO

E//

(16) $P(x) = Q(x)\cdot(x+1) - 1 \therefore P(-1) = -1$

$P(x) = R(x)\cdot(x-1)+1 \therefore P(1) = 1$

$P(x) = S(x)\cdot(x+2)+1 \therefore P(-2) = 1$

$$P(x) = T(x)\cdot \underbrace{(x+1)(x-1)(x+2)}_{\text{divisor de grau 3}} + \underbrace{ax^2+bx+c}_{\text{resto de grau 2}}$$

$P(-1) = -1 = a - b + c$

$P(1) = 1 = a + b + c$ ⊖ $2b = 2 \therefore b = 1$

$P(-2) = 1 = 4a - 2b + c$

$a + c = 0 \therefore c = -a \therefore 4a - 2 - a = 1$

$3a = 3 \therefore a = 1 \therefore c = -1$

resto $= x^2 + x - 1$ //   C//

(17) $Q(x) = Q(-x)$

MAS $Q(x) = P(f(x))$

$P(f(x)) = P(f(-x))$

MAS $P(x) = P(-x-1)$

$f(-x) = -f(x) - 1$

SE $f(x) = ax + b$

$-ax + b = -ax - b - 1$

$2b = -1 \therefore b = -1/2 \therefore f(x) = ax - \frac{1}{2}$

SERVE TAMBÉM SE $a = 1 \rightarrow f(x) = x - \frac{1}{2}$ //

CONFERINDO: $Q(x) = P\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$Q(-x) = P\left(-x - \frac{1}{2}\right)$

$P(u) = P(-u-1) \therefore P\left(x - \frac{1}{2}\right) = P\left(-x + \frac{1}{2} - 1\right) =$

$= P\left(-x - \frac{1}{2}\right)$ ok

A//

(18) $P(x) = Q(x)\cdot(x-1)+3 \therefore P(1) = 3$

$Q(x) = R(x)\cdot(x-2)+2 \therefore Q(2) = 2$

$$P(x) = S(x)\cdot \underbrace{(x-1)(x-2)}_{\text{divisor de grau 2}} + \underbrace{ax+b}_{\text{resto de grau 1}}$$

$P(2) = Q(2)\cdot(2-1)+3 = 2\cdot 1 + 3 = 5$

$P(2) = 2a + b = 5$

$P(1) = a + b = 3$ ⊖ $a = 2 \therefore b = 1$

resto $= 2x + 1$ //   C//

(19) RAÍZES DE $x^2 - ax - 2a^2 = 0$

SOMA $= a$, PRODUTO $= -2a^2$

$x_1 = 2a$ e $x_2 = -a$

RAÍZES DE $x^2 - (a+2)x + 2a = 0$

SOMA $= a + 2$, PRODUTO $= 2a$

$x_3 = a$ e $x_4 = 2$

COMO AS LETRAS C, D e E FALAM EM $a > 2$, VAMOS TESTAR

		$-a$		2		a		$2a$	
NUMERADOR	+	0	−		−		−	0	+
DENOMINADOR	+		+	∄	−	∄	+		+
QUOCIENTE	+	0	−	∄	+	∄	−	0	+

EM $-a < x < 2$ VALE A DESIGUALDADE

TESTANDO PARA $a = 3$

$$\frac{x^2 - 3x - 18}{x^2 - 5x + 6}$$

SE $x = 1 \rightarrow \frac{1 - 3 - 18}{1 - 5 + 6} = \frac{-20}{2} = -10$ OK

SE $x = 0 \rightarrow \frac{-18}{6} = -3$ OK

SE $x = -2 \rightarrow \frac{4 + 6 - 18}{4 + 10 + 6} = \frac{-8}{20} = -0{,}4$ OK

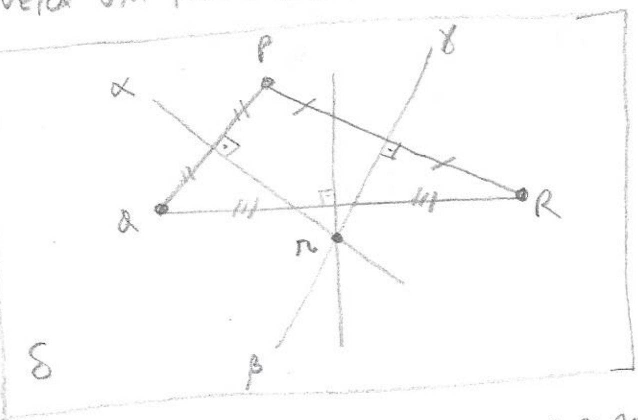
D//

ITA-MAT-1967

BOTELHO

(continuação)

(20) DADOS 3 PONTOS P, Q E R NO ESPAÇO, HAVERÁ UM PLANO δ QUE CONTERÁ O ΔPQR



α, β E γ SÃO OS PLANOS MEDIADORES DE PQ, QR E PR

NO PLANO δ, ELES SÃO AS MEDIATRIZES

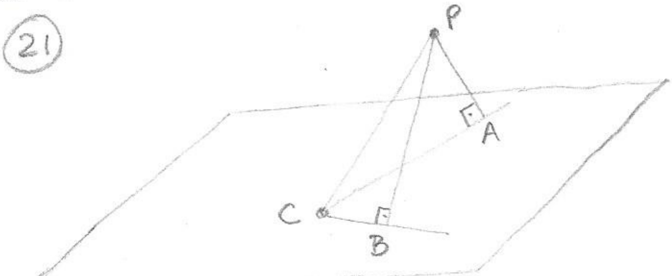
O ENCONTRO DESSES PLANOS É A RETA r, QUE, NO PLANO δ, EQUIVALE AO CIRCUNCENTRO DO ΔPQR

r É O LG DOS PONTOS QUE EQUIDISTAM DE P, Q E R

E//

---

(21)



COMO $C\hat{A}P$ E $C\hat{B}P$ SÃO ÂNGULOS RETOS, A E B PERTENCEM À ESFERA DE DIÂMETRO CP.

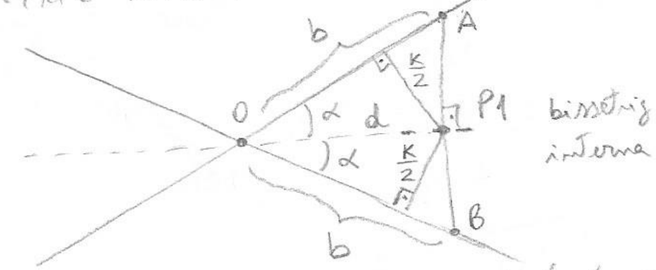
A INTERSEÇÃO DESSA ESFERA COM O PLANO É UMA CIRCUNFERÊNCIA.

SE P ESTÁ SOBRE C, O LG É O PRÓPRIO PONTO C (CENTRO DO FEIXE).

B//

---

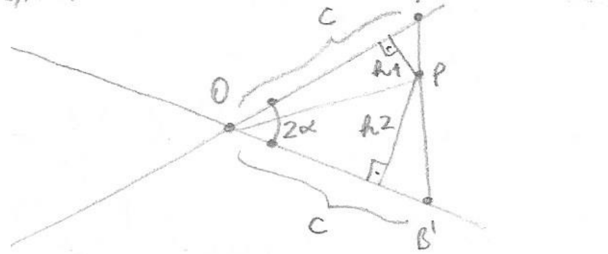
(22) VAMOS SUPOR UM PONTO P1 NA BISSETRIZ INTERNA QUE FAÇA PARTE DO LG



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{k}{2d} \quad \therefore \quad d = \frac{k}{2\operatorname{sen}\alpha} = cte \ (\alpha \text{ é dado})$$

$$\cos\alpha = \frac{d}{b} \quad \therefore \quad b = \frac{d}{\cos\alpha} = \frac{k}{\operatorname{sen}2\alpha} = cte$$

VAMOS SUPOR UM PONTO P QUALQUER QUE FAÇA PARTE DO LG

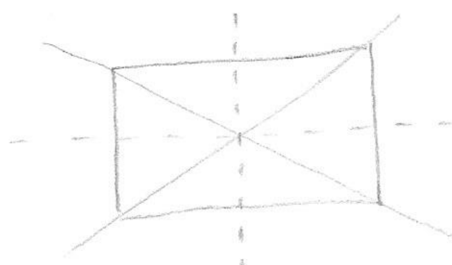


$$\Delta OA'B' = \frac{c^2 \operatorname{sen}2\alpha}{2} = \frac{c\,h_1}{2} + \frac{c\,h_2}{2} \quad \left(\div \frac{c}{2}\right)$$

$$c \cdot \operatorname{sen}2\alpha = h_1 + h_2 = k \quad \therefore \quad c = \frac{k}{\operatorname{sen}2\alpha} = b$$

P E P1 PERTENCEM À MESMA PERPENDICULAR À BISSETRIZ

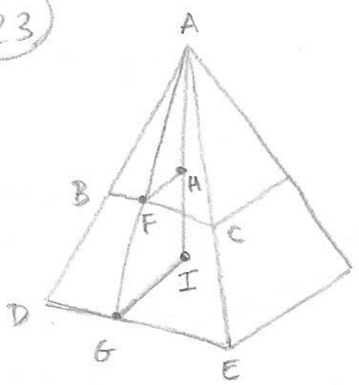
USANDO O MESMO RACIOCÍNIO NOS 4 ÂNGULOS QUE AS RETAS FORMAM, O LG É UM RETÂNGULO CUJOS LADOS SÃO PERPENDICULARES ÀS BISSETRIZES



O LG É UM QUADRILÁTERO//

A//

23



1ª PIRÂMIDE

$$S_{ADE} = \frac{DE \cdot AG}{2}$$

2ª PIRÂMIDE

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AF}{2}$$

$$r = \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{DE \cdot AG}{BC \cdot AF}$$

(POR UMA QUESTÃO DE LÓGICA, DEVEMOS CONSIDERAR A ÁREA DA 1ª PELA ÁREA DA 2ª)

MAS $\frac{DE}{BC} = \frac{AG}{AF} = \frac{AI}{AH} = \frac{h}{x}$

$$r = \frac{h^2}{x^2} \therefore x^2 = \frac{h^2}{r} \therefore x = \frac{h\sqrt{r}}{r}$$

E (SE FOSSE 2ª PELA 1ª, $x = h\sqrt{r}$, B)

24

$$T_{p+1} = \binom{20}{p}(1+x^5)^{20-p} \cdot x^{7p}$$

$$T_{q+1} = \binom{20-p}{q} 1^{20-p-q} \cdot x^{5q}$$

$$7p + 5q = 17 \therefore p = 1 \text{ e } q = 2$$

$$\binom{20}{1} \cdot \binom{20-1}{2} = 20 \cdot \frac{19 \cdot 18}{2} =$$

$$= 10 \cdot (20-1) \cdot 18 =$$

$$= 10(360-18) = 10 \cdot 342 = 3420$$

D

25

$$\sum_{k=0}^{10} 2^k \binom{10}{k}$$

BINÔMIO DE NEWTON

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$$

$$(1+2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 1^{10-k} 2^k$$

3^{10}

E