/

CENTRO TÉCNICO DE AERONÁUTICA

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

CONCURSO DE ADMISSÃO DE 1966 - PROVA DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES:

A prova consta de dois cadernos: um caderno de questões e um caderno de respostas.

Do caderno de questões fazem parte os enunciados de 15 - testes e 3 problemas.

O caderno de respostas consta de uma fôlha para os testes e uma fôlha em branco para resolução dos problemas. Pede-se ao candidato enumerar cada problema resolvido.

Os testes são de tríplice escolha. Assinale com um X, no caderno de respostas, o quadrado correspondente à afirmação que você considerar correta. Não responda questões sôbre as quais tenha dúvida, pois, 2 respostas erradas anulam 1 resposta certa.

O agente fiscal fornecerá papel para rascunho, o qual não será considerado na correção da prova.

Não será permitido o uso de tabelas, régua de cálculo, a-pontamentos, formulários e outros papéis a não ser os fornecidos pelo agente fiscal.

DURAÇÃO DA PROVA: 3 horas e 30 minutos.

Scanned by CamScanner

PRIMEIRA PARTE: TESTES

1) $\sqrt{-2k\,x^2 - 3kx + 2k}$ tem valor real para:

a) $k > 0$, $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant \frac{1}{2}$

b) $k > 0$, $-1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$

c) $k < 0$, $-2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$

2) O 5º têrmo do desenvolvimento de $\left(\frac{\text{sen } t}{2 \cos t} + \cos t\right)^8$ é:

a) $\frac{35}{8}$ $\text{sen}^4\, t$

b) $7\ \text{sen}^3 t\ \cos^2 t$

c) $\frac{7}{4}\ \frac{\text{sen}^5\, t}{\cos^2\, t}$

3) $\log_2 16 - \log_4 32$ é igual

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{2 \log_4 2}$

4) A desigualdade $\text{sen } x \geqslant \text{sen } y$ (x e y quaisquer) implica em que:

a) $x \geqslant y$

b) $x \leqslant y$

c) nem a) nem b)

5) Dados o seno e o cosseno de um arco x,

a) o arco fica determinado

b) o arco fica determinado a menos de um múltiplo de 2π

c) o arco fica determinado a menos do sinal.

6) A equação $x^7 + 4\,x^5 + x^3 + x + 13 = 0$ possue

a) uma raiz nula e as demais positivas

b) pelo menos uma raiz negativa

c) sò raízes complexas.

Scanned by CamScanner

7) Se $f(2x+1) = x$, (x qualquer) então,

a) $f(x) = \frac{x-1}{2}$

b) $f(x) = 2x + 1$

c) nem a) nem b).

8) Se $\log a = \bar{2},58717$ e $\log b = \bar{6},34948$ então $\frac{\log a}{\log b} =$

a) $\bar{3},06345$

b) 0,25000

c) 0,40750

9) Consideremos o sistema de duas equações nas duas incógnitas x, y:

$$x - y = Kx$$
$$-x + 5y = Ky \quad .$$

a) Qualquer que seja o valor de K, o sistema tem solução diferente da solução $x = 0,\ y = 0$.

b) Existe pelo menos um valor de K para o qual o sistema tem solução diferente da solução $x = 0,\ y = 0$.

c) Para nenhum valor de K, o sistema tem solução diferente da solução $x = 0$, $y = 0$.

10) O sistema de equações

$$4x + 5y = 0$$
$$x - \frac{5}{4}y = 0 \quad ,$$

a) tem uma infinidade de soluções.

b) não pode ser resolvido com auxílio da regra de Cramer.

c) tem uma única solução .

11) A equação $\operatorname{tg} x = x$ para $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$,

a) tem só uma solução .

b) não tem nenhuma solução .

c) tem mais do que uma solução .

Scanned by CamScanner

12) Indique qual das proposições abaixo é verdadeira:

a) Se duas retas não se cortam, suas projeções ortogonais sôbre um plano ou são coincidentes ou não se cortam.

b) Se BD é a projeção ortogonal de BC num plano ao qual - pertence o segmento AB e tal que $A\hat{B}C$ é um ângulo reto, então o ângulo $A\hat{B}D$ também é reto.

c) A projeção ortogonal de um paralelogramo sôbre um plano é um quadrilátero cujos ângulos opostos são iguais.

13) Indique qual das proposições abaixo é verdadeira:

a) Se $\underline{s}$ é uma reta secante às retas $\underline{r}$ e $\underline{t}$, então os ângulos colaterais externos são suplementares.

b) Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre sí.

c) Se um plano é perpendicular a duas retas distintas, - elas serão coplanares.

14) A desigualdade $\log_a(x^2 - 3x + 2) - \log_a(2x - 4) \geqslant 0$ onde $a = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ é satisfeita para valores de x tais que :

a) $2 \leqslant x \leqslant 3$

b) $x \geqslant 3$

c) $x < 2$ e $2 < x \leqslant 3$

15) $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\ (n-p)!}$ (n inteiro não-negativo e $p = 0,1,2, \ldots , n$) é:

a) sempre crescente com p

b) sempre decrescente com p

c) nem a) nem b)

Scanned by CamScanner

2ª PARTE - PROBLEMAS

1) Quantos números inteiros existem de 1 a 10.000 que não sejam divisíveis nem por 5 e nem por 7 .

2) Dois barcos partem num mesmo instante, de lados opostos de um rio de margens paralelas. Viajam, cada qual, perpendicularmente às margens, com velocidades constantes. Supondo que um dêles é mais rápido que o outro, êles se cruzam num ponto, situado a 720 metros da margem mais próxima. - Completada a travessia, cada barco fica parado no respectivo cais por 10 minutos. Na volta êles se cruzam a 400 metros da outra margem. Qual a largura do rio ?

3) No interior de um cubo regular de aresta $\underline{a}$, existem 9 esféras de mesmo raio $\underline{r}$. O centro de uma dessas esféras - coincide com o centro do cubo e cada uma das demais esféras tangencia a esféra do centro e três faces do cubo. Exprimir $\underline{a}$ em função de $\underline{r}$.

Scanned by CamScanner

ITA – MAT – 1966

BOTELHO.

1ª PARTE – TESTES DE TRÍPLICE ESCOLHA

(2 ERROS ANULAM 1 ACERTO)

(1) $\sqrt{-2kx^2-3kx+2k}$ É REAL SE

$-2kx^2-3kx+2k \geq 0$

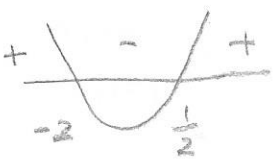
$2kx^2+3kx-2k \leq 0$

$k(2x^2+3x-2) \leq 0$

RAÍZES DE $2x^2+3x-2$

SOMA $= -\frac{3}{2}$ $\therefore$ PRODUTO $= -\frac{2}{2} = -1$

$x_1 = -2$ $\therefore$ $x_2 = \frac{1}{2}$



SE $k<0 \rightarrow x \leq -2$ OU $x \geq \frac{1}{2}$

SE $k>0 \rightarrow -2 \leq x \leq \frac{1}{2}$

A E C ERRADAS (TROCADAS)

B CERTA PORQUE, SE $k>0$, ENTÃO, NO INTERVALO $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$, QUE ESTÁ CONTIDO EM $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$, O PRODUTO É ≤ 0

B //

(2) $T_{p+1} = \binom{m}{p} a^{m-p} b^{p}$

$T_{4+1} = \binom{8}{4}\left(\frac{\text{sen}\, t}{2\cos t}\right)^{8-4} \cdot (\cos t)^4 =$

$= \frac{8!}{4!\,4!} \cdot \frac{\text{sen}^4 t}{16\cancel{\cos^4 t}} \cdot \cancel{\cos^4 t} =$

$= \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5}{\cancel{4\cdot 3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{16}_{2}} \cdot \text{sen}^4 t = \frac{35}{8}\,\text{sen}^4 t$ //

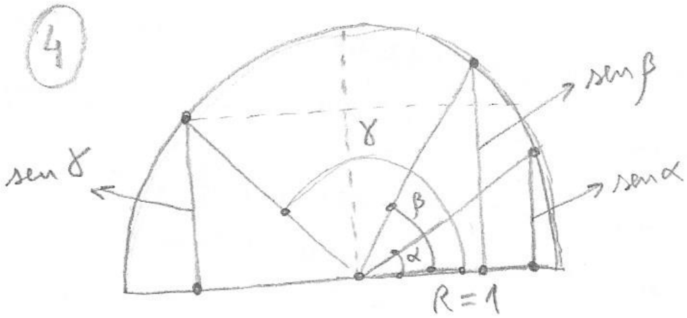
A //

(3) $\log_2 16 - \log_4 32 =$

$= \log_2 2^4 - \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^2} = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$ //

B //

(4)



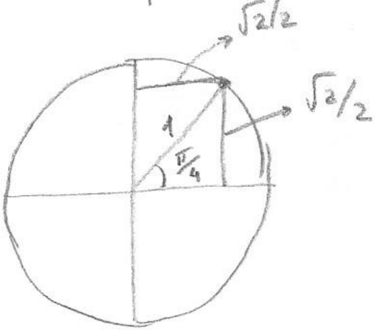
$\beta > \alpha$ E $\text{sen}\,\beta > \text{sen}\,\alpha$

$\gamma > \beta$ E $\text{sen}\,\gamma < \text{sen}\,\beta$

LOGO, SE $\text{sen}\,x \geq \text{sen}\,y$ NADA SE PODE DIZER //

C //

(5) SE TEMOS $\operatorname{sen} x$ E $\cos x$, POR EXEMPLO, $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ E $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, TEMOS APENAS UM PONTO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO, MAS O ÂNGULO É $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$



O ARCO FICA DETERMINADO A MENOS DE UM MÚLTIPLO DE 2π //

B //

(6) $x^7 + 4x^5 + x^3 + x + 13 = 0$

$x = 0$ NÃO É RAIZ ("A" ERRADA)

O GRAU É 7; NO PIOR CASO, HAVERIA 3 PARES DE RAÍZES CONJUGADAS COMPLEXAS, MAS PELO MENOS UMA RAIZ SERIA REAL ("C" ERRADA)

COMO HÁ AO MENOS UMA RAIZ REAL, ELA TEM QUE SER NEGATIVA. NÃO PODE HAVER RAÍZES POSITIVAS PORQUE SE $x > 0$ ENTÃO $x^7 > 0$, $4x^5 > 0$ E $x^3 > 0$ FAZENDO COM QUE O LADO ESQUERDO SEJA > 13, NUNCA ZERO.

B //

(7) $f(2x+1) = x$

SE $u = 2x+1$ ENTÃO $x = \frac{u-1}{2}$

$f(u) = \frac{u-1}{2} \therefore f(x) = \frac{x-1}{2}$ //

A //

(8) $\log a = \bar{2},58717 = -2 + 0,58717$

$\log b = \bar{6},34948 = -6 + 0,34948$

$\frac{\log a}{\log b} = \frac{-1,41283}{-5,65052} \therefore \frac{1,41283}{5,65132}$ 4 3

$\frac{\log a}{\log b} \approx \frac{1}{4} = 0,25000$ //

B //

(9) $\begin{cases} x - y = kx \\ -x + 5y = ky \end{cases} \therefore \begin{cases} (1-k)x + (-1)y = 0 \\ (-1)x + (5-k)y = 0 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5-k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ -1 & 5-k \end{vmatrix}} = \frac{0}{(1-k)(5-k) - (-1)(-1)} =$$

$$= \frac{0}{5 - k - 5k + k^2 - 1} = \frac{0}{k^2 - 6k + 4}$$

SE $k^2 - 6k + 4 \neq 0 \rightarrow x = 0$ E $y = 0$

SE $k^2 - 6k + 4 = 0 \rightarrow$ SISTEMA INDETERMINADO (INFINITAS SOLUÇÕES)

$$k = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}$$

HÁ DOIS VALORES DE k PARA OS QUAIS O SISTEMA TEM SOLUÇÃO DIFERENTE DE $x = 0, y = 0$ //

B //

ITA – MAT – 1966

BOTELHO

(continuação)

(10) $4x + 5y = 0$

$x - \frac{5}{4}y = 0$

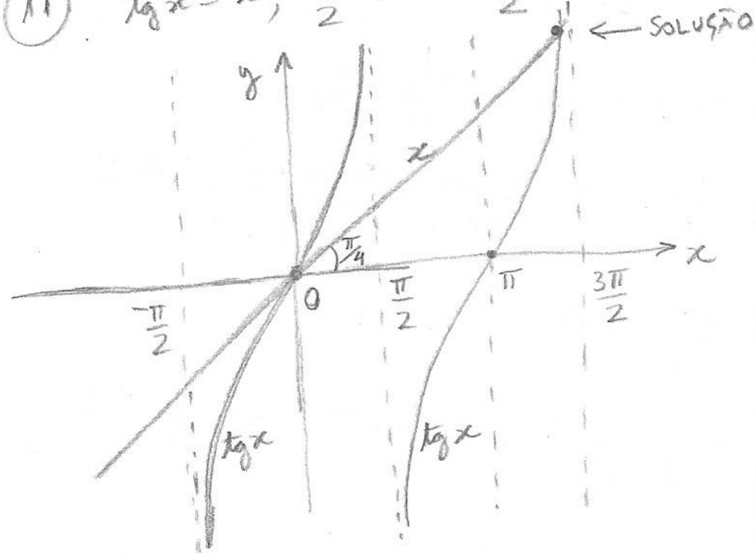
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -5/4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -5/4 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-5-5} = 0$$

$$y = \frac{-4x}{5} = 0 \quad \text{OU} \quad y = \frac{4x}{5} = 0$$

O SISTEMA PODE SER RESOLVIDO PELA REGRA DE CRAMER E SÓ TEM UMA ÚNICA SOLUÇÃO (0,0)

C

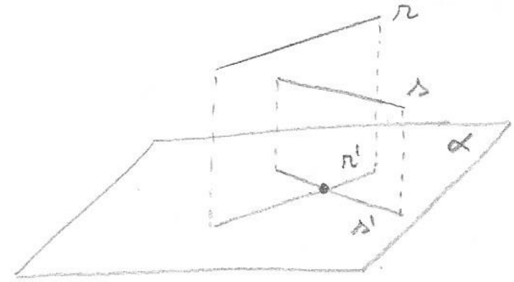
(11) $\text{tg}\, x = x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$



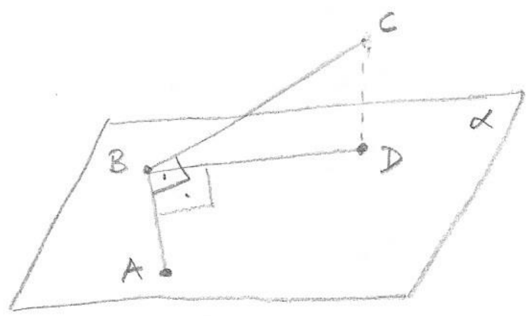
NO INTERVALO, A EQUAÇÃO SÓ TEM UMA SOLUÇÃO

A

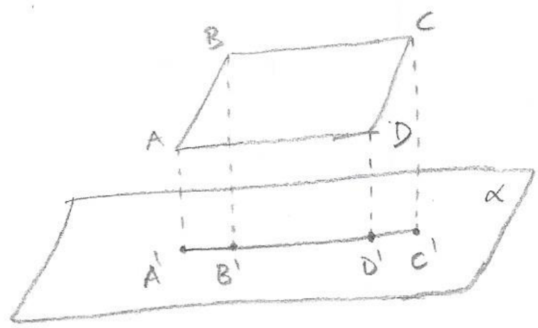
(12) A) FALSA PORQUE AS PROJEÇÕES ORTOGONAIS PODEM SE CORTAR



B) VERDADEIRA

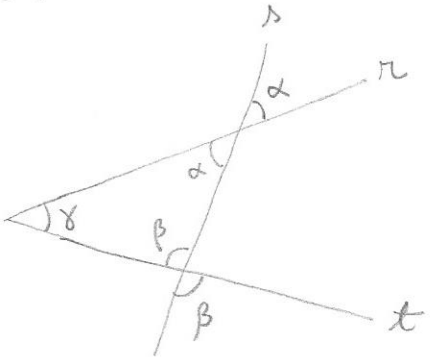


C) FALSA PORQUE A PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UM PARALELOGRAMO PODE SER UM SEGMENTO DE RETA, SE ESTIVER EM PLANO ⊥

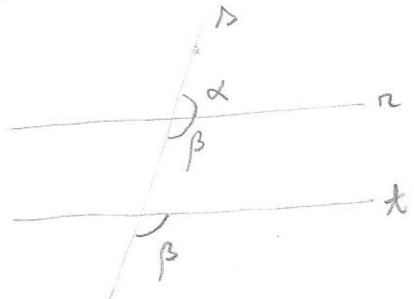


B

(13) A) ERRADA. SÓ SÃO SUPLEMENTARES SE r E t FOREM PARALELAS.

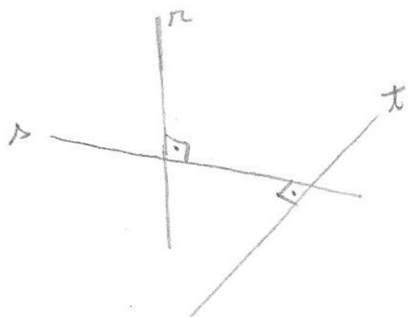


$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \therefore \alpha + \beta \neq 180°$$

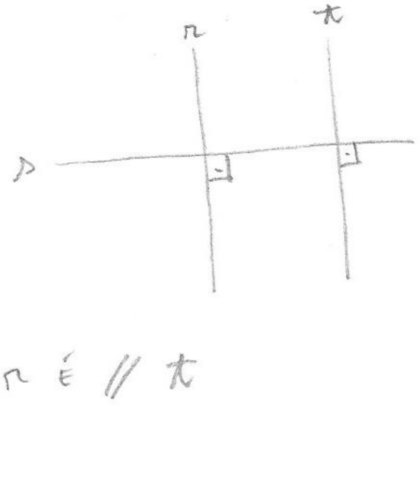


$$\alpha + \beta = 180°$$

B) ERRADA. SÓ SERIAM PARALELAS SE FOSSEM COPLANARES.

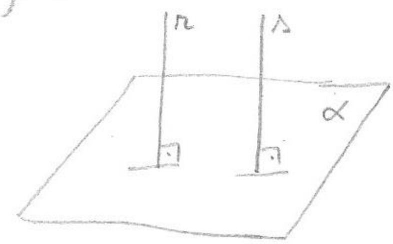


r NÃO É // A t



r É // t

C) CERTA. SE $\alpha \perp r$ E $\alpha \perp s$, ENTÃO r E s SÃO // E DEFINEM UM PLANO β (SÃO COPLANARES)



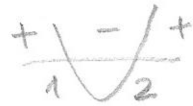
C//

(14) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 4} \right) \geq 0$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \therefore 0 < \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 4} \leq 1$$

PARA QUE OS LOGARITMOS EXISTAM, OS LOGARITMANDOS DEVEM SER MAIORES QUE 0

$x^2 - 3x + 2 > 0 \therefore$



$\therefore$ $x < 1$ OU $x > 2$

E

$2x - 4 > 0 \therefore x > 2$

COMO $x \neq 2 \rightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 4} = \frac{x - 1}{2}$

$$\frac{x-1}{2} > 0 \therefore x > 1$$

$$\frac{x-1}{2} \leq 1 \therefore x - 1 \leq 2 \therefore x \leq 3$$

$$2 < x \leq 3 //$$

SEM RESPOSTA //

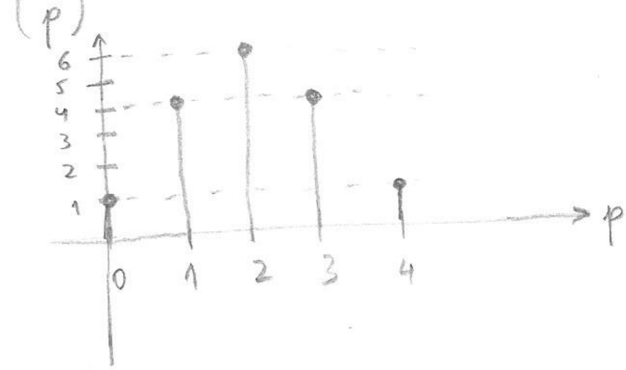
ITA – MAT – 1966

BOTELHO

(continuação)

(15) $\binom{m}{p}$ CRESCE E DEPOIS DECRESCE COM p

EX.: $\binom{4}{p}$



C //

2ª PARTE – PROBLEMAS

(1) TOTAL = 10.000

DIVISÍVEIS POR 5 = 5 … 10.000

$(\div 5) = 1 \dots 2.000$

DIVISÍVEIS POR 7 = 7 … 9996

$(\div 7) = 1 \dots 1428$

10000 | 7
30   1428
20
60
4

DIVISÍVEIS POR 35 = 35 … 9975

$(\div 35) = 1 \dots 285$

CONTADOS DUAS VEZES

10000 | 35
300   285
280
200
175
25

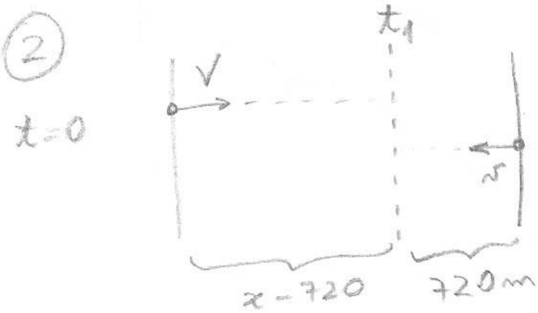
$N = 10000 - 2000 - 1428 + 285 =$

$= 8000 - 1428 + 285 =$

$= 6572 + 285 =$

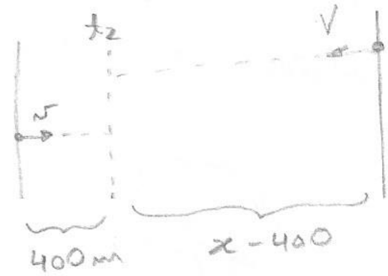
$= 6857$ //

(2)



DO INÍCIO ($t=0$) ATÉ O 1º ENCONTRO (t_1):

$$t_1 = \frac{720}{v} = \frac{x-720}{V} \therefore \frac{V}{v} = \frac{x-720}{720} \quad (I)$$



DO INÍCIO ATÉ O 2º ENCONTRO (t_2):

$$t_2 - 10\,\text{min} = \frac{x+400}{v} = \frac{x + x - 400}{V}$$

$$\frac{V}{v} = \frac{2x-400}{x+400} \quad (II)$$

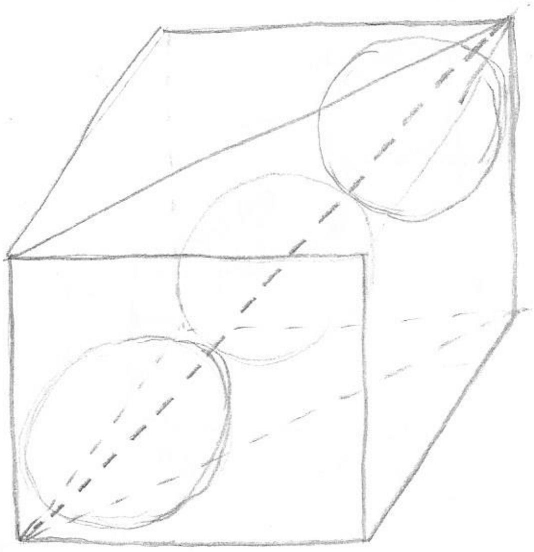
DE (I) E (II): $\frac{x-720}{720} = \frac{2x-400}{x+400}$

$$x^2 - 720x + 400x - \cancel{720 \cdot 400} = 1440x - \cancel{720 \cdot 400}$$

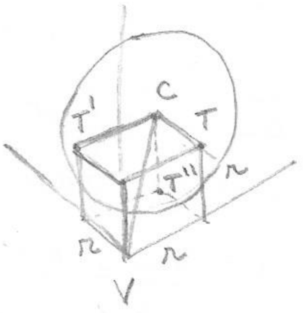
$$x^2 = (1440 + 720 - 400)x$$

$$x = 2160 - 400 = 1760\,\text{m}$$ //

(3) HÁ UMA ESFERA NO CENTRO E 8 ESFERAS, UMA EM CADA QUINA DO CUBO

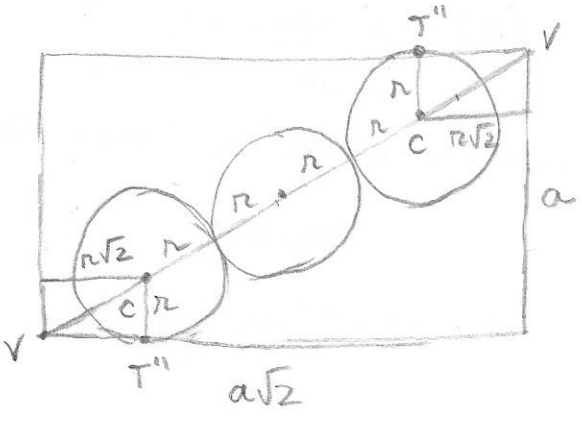


EM CADA QUINA, FORMA-SE UM CUBO COM UM VÉRTICE, UM CENTRO DE UMA ESFERA E OS PONTOS DE TANGÊNCIA ENTRE A ESFERA E O CUBO



$CV = r\sqrt{3}$

VAMOS OLHAR UM PLANO QUE CORTE O CUBO E CONTENHA UMA DIAGONAL PRINCIPAL DO CUBO



$$a\sqrt{3} = 4r + 2r\sqrt{3} \therefore a = 2r\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right)$$