CENTRO TÉCNICO DE AERONÁUTICA

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

CONCURSO DE ADMISSÃO DE 1959 - EXAME DE MATEMÁTICA

Tempo de exame : 4 horas

Instruções: a) Os rascunhos não serão considerados na correção das provas;
b) Esta folha deverá ser devolvida juntamente com a prova.

PRIMEIRA PARTE

Das 5 afirmativas seguintes, apenas 3 são verdadeiras. Assinale e demonstre as afirmativas verdadeiras.

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[p]{x} - 1} = \dfrac{p}{n}$.

2) Na equação $x^3 + ax^2 + bx - \sqrt{2} = 0$, existem valores para a e b tais que o produto das raizes da equação é um número inteiro.

3) $\log_a 3 + \log_a \dfrac{3}{3a - 1} + 1 = \log_a \left(3 + \dfrac{3}{3a - 1} \right)$, qualquer que seja $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 1/3$.

4) Se existirem x e y tais que $x > y$ e $a^x < a^y$, ($a > 0$), então, existem z e w tais que $z > w$ e $a^z > a^w$.

5) $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ onde n é um número inteiro positivo e x qualquer número maior ou igual a -1.

SEGUNDA PARTE

Das 5 afirmativas seguintes, apenas 3 são verdadeiras. Assinale e demonstre as afirmativas verdadeiras.

1) Existe uma progressão geométrica de 10 termos $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ de modo que $a_1 = 2$, $a_2 = 6$ e $(a_{10})^{1/8} = 3(2^{1/8})$.

2) A equação $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ admite sempre duas raizes cujo produto é 1, quaisquer que sejam $a \neq 0$ e b.

3) No desenvolvimento de $\left(x + \dfrac{1}{x} \right)^{2n+1}$, onde n é inteiro positivo, pela fórmula do binômio de Newton, existe um termo que não depende de x.

4) Para todo x tal que $(\text{sen } x)(\cos x) \neq 1/2$, tem-se

$$\text{tg}^2\left(x + \pi/4 \right) + 1 = \frac{1}{1/2 - (\text{sen } x)(\cos x)}$$

5) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y < 0$ sempre que $\pi/2 < x < \pi$, $-\pi/2 < y < 0$ e $x - y > \pi$.

TERCEIRA PARTE

Das 5 afirmativas seguintes, apenas 3 são verdadeiras. Assinale e demonstre as afirmativas verdadeiras.

1) Se m e p são números inteiros positivos tais que o número de combinações de m objetos p a p seja igual ao número de combinações dos m objetos $p-1$ a $p-1$ então, m é necessariamente impar.

2)
$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2a+d \\ 1 & b & 2b+d \\ 1 & c & 2c+d \end{vmatrix} \neq 0.$$

3) Inscreve-se um cubo C em uma esfera E. Nesse cubo inscreve-se uma esfera E'. Inscreve-se um novo cubo C' na esfera E'. A área total do cubo C' é $\frac{2}{3\pi} S$, onde S é a área da esfera E.

4) Inscreve-se uma esfera em um cone circular reto cujo ráio da base é $a > 1$. Então, $\ell r > h - a$, onde h é a altura do cone, ℓ a sua geratriz e r é o ráio da esfera.

5) A área lateral do tronco de pirâmide regular é igual ao produto do apótema pela soma dos perímetros das bases.