

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE MATEMÁTICA
CENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICA
EXAME DE HABILITAÇÃO DE 1957 - PROV. DE MATEMÁTICA

DURAÇÃO - 4 HORAS

Além das instruções do Sr. Fiscal observe isto:

1. Não é preciso copiar os enunciados dos problemas nem resolvê-los pela ordem; numere com cuidado as questões e procure deixar espaço de três linhas entre elas;
2. Não faça perguntas a respeito dos problemas; interpreta-los é parte da prova;
3. Não é permitido empregar formulários, tabelas, etc.;
4. Leia com cuidado as questões; se alguma delas lhe parecer difícil, não se detenha a examiná-la; passe a outra mais fácil e volte depois, se houver tempo, ao que ficou por fazer.

1ª parte

1) Definir radiano; escrever a relação entre os números que medem um ângulo em graus e radianos e justificar a relação.
Que se entende por arco orientado?

Dois ângulos α e β são medidos em radianos pelos números $0,5$ e $0,5 + 6\pi$. Qual o ângulo maior? Explicar a resposta.

2) Provar que $1 + \operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen}(a+45^\circ)}{\cos a}$. (Sugestão: $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$)

3) São dados os objetos A, B, C, D . Responder as perguntas seguintes (se tiverem sentido):

- a) quantos são os arranjos desses objetos, tomados 3 a 3?
- b) quantas as combinações, tomados 2 a 2?
- c) quantas as permutações, tomados 3 a 3?

Escrever os arranjos desses objetos tomados 2 a 2; escrever as combinações 2 a 2; escrever as permutações dos 4 objetos. Em que se distinguem as combinações dos arranjos?

4) A que distância do vértice, devemos cortar um cone reto de revolução, por um plano paralelo à base, de modo que o volume do cone destacado seja $1/8$ do volume do primeiro cone?

2ª parte

5) Se $abcd \neq 0$, determinar p e q no sistema de equações

$$ax + by = c$$

$$px + qy = d$$

de modo que o sistema seja indeterminado.

6) É possível encontrar uma equação do tipo $x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$, de modo que duas raízes sejam da forma p e $1/q$ (p e q naturais, primos entre si) e a terceira raiz seja um número fracionário não inteiro?

No caso de o problema ser possível, quais os valores de p ?

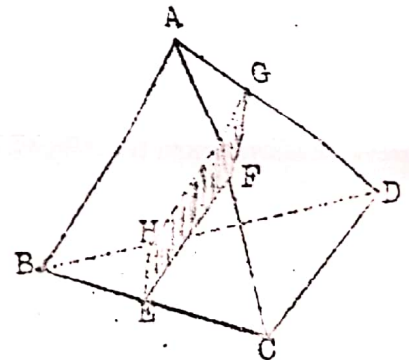
7) Resolver a equação (recíproca)

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0.$$

8) Sabendo-se que $a_n = \frac{n!}{n^n}$, calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

3ª parte

9) Dado o tetraedro regular ABCD, tomam-se os pontos médios E de BC, F de AC, G de AD, H de BD. Mostre que o quadrilátero EFGH é um quadrado.



10) Os números a, b, c satisfazem a relação $a + b^2 = 1 - b$. Que condição deve satisfazer o número a , para que os logaritmos desses números a, b, c , nessa ordem, formem uma progressão geométrica?