MINISTÉRIO DA AERONÁUTICA

CENTRO TÉCNICO DE AERONÁUTICA

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

Exame de Matemática - 1955

Observações.

Duração da prova: 3 horas e meia.

Não é permitido uso de livros, apontamentos ou táboas de logarítmos.

Procure resolver as questões na ordem em que estão apresentadas.

Numere cuidadosamente cada questão.

I parte.

1.1 Resolver a equação $(2x + 3)^2(x^2 - 1) = 0$.

1.2 Determinar o 5º termo do desenvolvimento, ordenado segundo as potências decrescentes de x, de $(1 + 2x)^{10}$.

1.3 Definir progressão geométrica e progressão geométrica decrescente.

1.4 Determinar o logarítmo de 9^4 no sistema de base 3. Justificar.

1.5 Definir reta perpendicular a um plano e definir planos paralelos.

1.6 Determinar a área de um fuso esférico de 30 graus, pertencente a uma esfera de 4 metros de diâmetro.

1.7 Como se determinam os pontos de um plano, equidistantes de dois pontos dados?

1.8 Se $\cot g\ a = 3/4$, qual o valor de $\operatorname{tang}(a + \pi)$? Justificar.

1.9 Calcular o comprimento de um arco de 60 graus em uma circunferência de 7 metros de ráio.

1.10 Calcular $\operatorname{sen} 750^\circ$.

II parte.

2.1 Resolver a equação $6x^3 + 11x^2 - 3x - 2 = 0$, sabendo-se que ela admite uma raiz inteira.

2.2 Demonstrar que se dois planos são paralelos, toda reta perpendicular a um dos planos é perpendicular também ao outro plano.

2.3 Num cilindro de 8 cm de altura e 2 cm de ráio, foi inscrito um prisma triangular regular. Calcular o excesso do volume do cilindro sobre o do prisma.

2.4 $\operatorname{sen} a = 3/5$ e $\cos b = 4/7$. Calcular $\operatorname{tang}(a + b)$, sabendo-se que os arcos estão no primeiro quadrante.

III parte.

3.1 Num plano há doze pontos, dos quais cinco estão em uma reta r. Se não existe outra reta com três dos doze pontos dados, quantos são os triângulos determinados pelos doze pontos ?

3.2 Calcular

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n+2)}$$

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA – ITA

PROVA DE MATEMÁTICA DE 1955 – SOLUÇÕES – BOTELHO

<u>I parte</u>

1.1) A raiz dupla de $(2x+3)^2$ é x = –3/2

As raízes de $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ são x = –1 e x = +1

As raízes são –3/2 (dupla), –1 e +1

1.2) Binômio de Newton $(a+b)^n$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p} b^p = \binom{10}{p} (2x)^{10-p} (1)^p$$

5º termo é p=4

$$T_5 = \binom{10}{4} (2x)^{10-4} (1)^4 = \frac{10.9.8.7}{4.3.2}.2^6.x^6 = 13440.x^6$$

1.3) Progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior por uma constante chamada razão (q).

Progressão geométrica decrescente é uma PG em que, se o primeiro termo é maior que zero, então 0 < q < 1 (ex.: 1, 1/2, 1/4,...), e se o primeiro termo é negativo, então q > 1 (ex.: –1, –2, –4,...).

1.4) $\log_3 9^4 = \log_3 (3^2)^4 = \log_3 3^8 = 8$

1.5) Reta perpendicular a um plano é a reta perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo ponto de interseção da primeira reta com o plano. Isso já foi perguntado na prova de 1952.

Planos paralelos são os que não têm nenhum ponto em comum.

1.6) Fuso esférico é a superfície formada pelo giro de αº de uma semicircunferência em torno do diâmetro de uma esfera. Para determinar a área, basta fazer uma regra de três: se o giro é completo (360º), a área é a da esfera ($4\pi r^2$); se o giro é de 30º, basta dividir por 12: $\pi r^2/3 = 4\pi/3$ m^2.

1.7) Os pontos de um plano π equidistantes de dois pontos dados são os pertencentes à mediatriz dos pontos dados (se estes pertencem ao plano π) ou à interseção do plano π com o plano mediador dos pontos dados (se estes não pertencem ao plano π).

1.8) ctg a = 3/4 → tg a = 4/3 → tg(a+π) = $\frac{tga+tg\pi}{1-tgatg\pi} = \frac{\frac{4}{3}+0}{1-\frac{4}{3}.0} = \frac{4}{3}$

1.9) 60º equivale a π/3 rad. O comprimento de arco ℓ = r.θ = 7π/3 m.

1.10) sen 750º = sen (2.360º+30º) = sen 30º = 1/2.

II Parte

2.1) $6x^3 + 11x^2 - 3x - 2 = 0$ → Testando as raízes 0, 1, 2, –1 e –2, vemos que –2 é raiz

Algoritmo de Briot-Ruffini

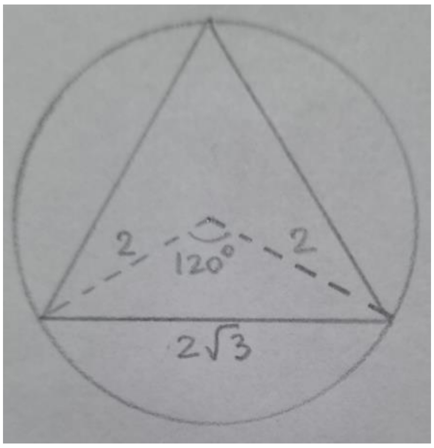
	6	11	–3	–2
–2	6	–1	–1	0

$6x^2 - x - 1 = 0$ → $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4.6.(-1)}}{2.6} = \frac{1 \pm 5}{12} = \frac{1}{2}\, ou - \frac{1}{3}$

As raízes são –2, –1/3 e 1/2.

2.2) Se dois planos α e β são paralelos, então seus vetores normais n_α e n_β são paralelos. Se uma reta é perpendicular a α, ela é paralela a n_α. Logo, ela também é paralela a n_β e, portanto, perpendicular a β.

2.3) Olhando de cima, temos a seção reta do cilindro, um círculo de raio 2 cm, e a seção reta do prisma triangular, um triângulo equilátero de lado $2\sqrt{3}$ cm.



O excesso de volume do cilindro em relação ao prisma é a altura vezes a diferença entre as áreas do círculo e do triângulo equilátero: $8\left(\pi.2^2 - \frac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}\right) = 8(4\pi - 3\sqrt{3}) = (32\pi - 24\sqrt{3})cm^3$

2.4) a e b são arcos de 1º quadrante

sen a = 3/5 → cos a = 4/5 → tg a = 3/4

cos b = 4/7 → sen b = $\sqrt{33}$/7 → tg b = $\sqrt{33}$/4

$$tg(a+b) = \frac{tga+tgb}{1-tga.tgb} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{33}}{4}}{1-\frac{3}{4}.\frac{\sqrt{33}}{4}} = \frac{4(3+\sqrt{33})}{16-3\sqrt{33}} = \frac{12+4\sqrt{33})}{16-3\sqrt{33}}$$

III parte

3.1) O número total de triângulos seria C 12,3 = $\frac{12!}{9!3!} = \frac{12.11.10}{6} = 220$

Mas temos que retirar os triângulos que deixam de ser formados, que são os triângulos compostos por 3 dos 5 pontos colineares: C 5,3 = $\frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4}{2} = 10$

220 – 10 = 210 triângulos

3.2) É uma questão parecida com a última de 1951

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{log(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{logn}{logn} = 1$$