CENTRO TÉCNICO DE AERONÁUTICA

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

EXAME DE ADMISSÃO DE MATEMÁTICA

ANO DE 1954

Duração da Prova: 3 horas e meia

## 1ª Parte

1 - Dizer quando uma fração ordinária é igual, maior ou menor que outra.

2 - Definir os conceitos de quociente e resto na divisão de polinômios racionais inteiros.

3 - Provar que a função $x - 2$ é contínua no ponto $x = 2$.

4 - Qual é o logarítmo, na base 10, de $\sqrt[3]{10^5}$ ? Justificar a resposta.

5 - Definir superfícies cônica, cilíndrica e de revolução.

6 - Qual é a superfície total de um cone circular reto, cujo raio da base é 4 cm e a altura 20 cm?

7 - Calcular sen 30°; usando êste resultado, calcular sen 210°.

8 - Sendo a e b arcos do primeiro quadrante e sabendo-se que sen a = 1/2 e sen b = 1/3, calcular sen(a+b).

9 - Calcular o módulo de $\frac{3i}{2+i}$.

10 - A equação $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ tem uma raiz igual a -2. Calcular as outras raizes dessa equação.

## 2ª Parte

11 - Demonstrar que o resto da divisão de um polinômio P(x), racional inteiro em x, por $x - a$ é $P(a)$, isto é, o valor que assume $P(x)$, quando se faz $x = a$.

12 - Resolver o sistema de inequações

$$x^2 + x - 2 > 0$$
$$2x^2 - x - 1 < 0.$$

13 - Demonstrar que o volume de um cilindro reto de base circular é $\pi r^2 h$, sendo r o raio da e h, a altura do cilindro.

## 3ª Parte

1 - Para que valores de m a equação $x^2 + 2\sqrt{3}.x - \log m = 0$ admite raizes reais? Quais os sinais das raízes da equação, para êsses valores de m ?

2 - Mostrar que

$$\frac{\log_a k}{\log_{ma} k} = 1 + \log_a m.$$

/lip

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA – ITA

PROVA DE MATEMÁTICA – 1954 – SOLUÇÕES – BOTELHO

**1ª Parte**

1) Uma fração ordinária é igual, maior ou menor que outra quando, reescritas com o mesmo denominador, o numerador da primeira é igual, maior ou menor que o numerador da segunda. Por exemplo, 3/4 é igual a 6/8, maior que 5/8 e menor que 7/8.

2) Na divisão de dois polinômios racionais inteiros (cujos expoentes das variáveis são números naturais) P(x) e D(x), o quociente Q(x) e o resto R(x) são polinômios tais que P(x) = Q(x).D(x) + R(x), o grau de Q(x) é menor ou igual ao grau de P(x) e o grau de R(x) é menor ou igual ao grau de D(x).

3) A função x – 2 é contínua em x = 2 porque $\lim_{x \to 2^-}(x-2) = \lim_{x \to 2^+}(x-2) = 0$

4) $\log_{10} \sqrt[3]{10^5} = \log_{10} 10^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}\log_{10} 10 = \frac{5}{3}$

5) O enunciado é: “Definir superfícies cônica, cilíndrica e de revolução”

Superfície cônica de diretriz C e vértice V é a superfície gerada por todas as retas que passam por algum ponto de uma curva C contida em um plano π e pelo ponto V que não pertence a π.

Superfície cilíndrica é a superfície gerada por uma reta que se move ao longo de uma curva plana, denominada diretriz, paralelamente a uma reta fixa, denominada geratriz.

Superfície de revolução é a superfície gerada pela rotação de uma curva plana, chamada geratriz, em torno de um eixo.

6) O enunciado é: “Qual é a superfície total de um cone circular reto, cujo raio da base é 4 cm e altura $\sqrt{20}$ cm?” (Magarinos e Silva Filho, pág. 221).

A área total do cone é dada pela área lateral π.r.g mais a área da base π.r$^2$. A geratriz g é a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são o raio da base r = 4 cm e a altura h = $\sqrt{20}$ cm. Daí, g = $\sqrt{4^2 + \sqrt{20}^2} = \sqrt{16+20} = \sqrt{36} = 6\ cm.$

Logo, a área é π.4.6 + π.4.4 = 40π cm$^2$

7) O enunciado é: “Calcular sen 30º; usando este resultado, calcular sen 210º”

sen 30º = 1/2

sen 210º = sen(180º+30º) = sen180º.cos30º + sen30º.cos180º = 0 + (1/2).( –1) = –1/2

8) O enunciado é: “Sendo a e b arcos do 1º quadrante e sabendo-se que sen a = 1/2 e sen b = 1/3, calcular sen(a+b)”

cos a = $\sqrt{1 - sen^2 a} = \sqrt{1 - 1/4} = \sqrt{3/4} = \sqrt{3}/2$

cos b = $\sqrt{1 - sen^2 b} = \sqrt{1 - 1/9} = \sqrt{8/9} = 2\sqrt{2}/3$

sen(a+b) = sena.cosb + senb.cosa = $\frac{1}{2}.\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$

9) O enunciado é: “Calcular o módulo de $\frac{3i}{2+i}$”

$\left|\frac{3i}{2+i}\right| = \frac{3}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

10) O enunciado é: “A equação $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ tem uma raiz igual a –2. Calcule as outras raízes dessa equação.”

Algoritmo de Briot-Ruffini

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 1 | –5 | 2 |
| –2 | 2 | –3 | 1 | 0 |

$2x^2 - 3x + 1 = 0$ → $x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.2.1}}{2.2} = \frac{3 \pm 1}{4}$ → x = 1/2 ou x = 1

**<u>2ª Parte</u>**

11) P(x) = Q(x).D(x) + R(x) → Se D(x) = x – a, então P(x) = Q(x).(x – a) + R(x)

Se x = a, então P(a) = Q(a).(a – a) + R(a) = 0 + R(a) = R(a)

12) $x^2 + x - 2 > 0$ → raízes têm soma –1 e produto –2 → raízes –2 e 1 → x < –2 ou x>1

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | –2 | | 1 | |
| Parábola com concavidade para cima | + | 0 | – | 0 | + |

$2x^2 - x - 1 < 0$ → raízes têm soma 1/2 e produto –1/2 → raízes –1/2 e 1 → –1/2 < x < 1

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | –1/2 | | 1 | |
| Parábola com concavidade para cima | + | 0 | – | 0 | + |

A interseção entre os dois intervalos é vazia → não há solução

13) O volume do cilindro reto é o produto da área da base pela altura. Como a base é um círculo de raio r e área $\pi.r^2$ e altura é h, o volume é $\pi.r^2.h$

**<u>3ª Parte</u>**

1) $$x = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 4.1.(-logm)}}{2.1} = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 + 4.logm}}{2} = -\sqrt{3} \pm \sqrt{3 + logm}$$

A equação admite raízes reais para logm ≥ – 3 → m ≥ $10^{-3}$

Se m = $10^{-3}$, então Δ = 0 e as raízes são reais e iguais a $-\sqrt{3}$

Se m > $10^{-3}$, então Δ > 0 e as raízes são reais e distintas, mas há três casos. Se m < 1, as duas raízes são negativas. Se m = 1, uma raiz é zero e a outra é negativa ($-2\sqrt{3}$). Se m > 1, uma raiz é positiva e a outra é negativa.

2) $$\frac{\log_a k}{\log_{ma} k} = \frac{\log_a k}{\frac{\log_a k}{\log_a ma}} = \log_a ma = \log_a a + \log_a m = 1 + \log_a m$$