INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

EXAME DE ADMISSÃO - 1953 PROVA DE MATEMÁTICA .

Observações: Duração da prova: três horas e meia. Não é permitido o uso de livros, apontamentos e táboas de logarítmos.

PRIMEIRA PARTE

1) Definir a soma de duas frações ordinárias. Tem significado a expressão $\frac{1}{0}$? Se tem significado, é o mesmo que o de $\frac{2}{0}$?

2) Definir resto da divisão de números inteiros.

3) Definir o limite de uma função. Existe sempre o limite de uma função num ponto ?

4) Definir logarítmo .

5) Dar a definição de superfície esférica .

6) Definir radiano.

7) Demonstrar que $tg(x+\pi) = tg(x)$. É tangente de x definida quando $x = \frac{\pi}{2}$? Quando $x = \pi$, qual o valor de $tg(x)$?

8) Enunciar o teorema sobre o produto de números complexos dados sob a forma trigonométrica.

9) Qual é o módulo de $\frac{1}{3} + \frac{5}{6} i$?

10) Que é raiz de uma equação ?

SEGUNDA PARTE

1) Demonstrar que o resto, na divisão de uma soma por um número, é o resto da soma dos restos das parcelas. Deduzir que um número é divisível por 9 quando, e sòmente quando, a soma dos seus algarismos fôr divisível por 9 .

2) Determinar os valores de x para os quais o trinômio

$$y = \frac{7}{2}\left(x - \frac{4}{7}\right) + x^2$$ tenha valores positivos .

3) Calcular o volume gerado por um triângulo retângulo isósceles , cujos catetos medem 3m , e girante em torno da paralela à hipotenusa, traçada pelo vértice do ângulo reto.

4) Determinar o sinal de $tg(x) + sen(x)$, sabendo-se que $90° < x < 180°$, e justificar a resposta.

TERCEIRA PARTE

1) Discutir o sistema:

$$\begin{aligned} mx + y - z &= 4 \\ x + my + z &= 0 \\ x - y \quad\;\; &= 2 \end{aligned}$$

2a) Qual é a soma da série: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$?

2b) Partindo de um quadrado Q_1 , cujo lado mede a metros, consideremos os quadrados $Q_2, Q_3, Q_4, \ldots Q_n$ tais que os vértices de cada quadrado sejam os pontos médios dos lados do quadrado anterior. Calcular, então, a soma das áreas dos quadrados $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_n$.

****

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA – ITA

PROVA DE MATEMÁTICA – 1953 – SOLUÇÕES – BOTELHO

Primeira Parte

1) Fração ordinária é uma fração a/b onde a é inteiro e b é inteiro positivo. A soma de frações ordinárias $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.d+b.c}{b.d}$. Por exemplo, se a=1, b=3, c=5 e d=7, então $\frac{1}{3}+\frac{5}{7}=\frac{1.7+5.3}{3.7}=\frac{7+15}{21}=\frac{22}{21}$.

2) Dado um inteiro “a” e um inteiro não nulo “d”, o resto da divisão de números inteiros é o inteiro “r” tal que a = q.d + r e 0 ≤ r <|d|, onde “q” é um inteiro chamado quociente. Por exemplo, o resto da divisão de 13 por 3 é 1 porque 13 = 4.3 + 1. Esta pergunta também caiu na prova de 1952.

3) O limite de uma função f(x) quando x tende a “a” é L quando, para todo ε>0, existe um δ>0 tal que se |x – a|<δ, então |f(x) – L|<ε. Por exemplo, $\lim_{x\to 1} 2x=2$ porque basta tomar δ = ε/2 para que |x – 1|< δ implique |2x – 2|< ε. Nem sempre o limite existe, por exemplo, quando a função é descontínua em um ponto (o limite à esquerda é diferente do limite à direita).

4) O logaritmo de um número positivo “a” em uma base “b” positiva e diferente de 1 é o número “x” tal que $a=b^x$. Por exemplo, $\log_2 8=3$ porque $8 = 2^3$.

5) Superfície esférica é a superfície em que todos os pontos distam r (raio) de um ponto fixo (centro).

6) Um radiano é o ângulo definido em um círculo por um arco de comprimento igual ao raio. Uma circunferência completa corresponde a 2π radianos porque seu comprimento é 2πr, seu raio é r e 2πr/r = 2π.

7) $tg(x+\pi)=\frac{tgx+tg\pi}{1-tgx.tg\pi}=\frac{tgx+0}{1-tgx.0}=tgx$

Para x=π/2, a tangente de x não é definida porque tende a +∞, já que tg(π/2) = sen(π/2)/cos(π/2), mas cos(π/2) = 0.

Como vimos acima, tgπ = senπ/cosπ = 0/–1 = 0

8) Se $z_1 = r_1.cis\theta_1$ e $z_2 = r_2.cis\ \theta_2$, então $z_1.z_2 = r_1.r_2.cis(\theta_1+\theta_2)$

9) $\left|\frac{1}{3}+\frac{5}{6}i\right|=\sqrt{(\frac{1}{3})^2+(\frac{5}{6})^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{25}{36}}=\sqrt{\frac{4}{36}+\frac{25}{36}}=\sqrt{\frac{29}{36}}=\frac{\sqrt{29}}{6}$

10) Raiz de uma equação é uma solução da equação, é um valor da incógnita que iguala os dois membros. Por exemplo, 1 é raiz da equação x – 1 = 0.

Segunda Parte

1) Dividindo a+b por d, temos a+b = d.q + r (eq. 1)

Dividindo a por d, temos $a = d.q_1 + r_1$ (eq. 2)

Dividindo b por d, temos $b = d.q_2 + r_2$ (eq. 3)

Somando a eq. 2 com a eq. 3, temos $a+b = d(q_1+q_2) + (r_1+r_2)$

Comparando com a eq. 1, $q = q_1+q_2$ e $r = r_1+r_2$

Uma observação é que se $d \le r_1+r_2 \le 2d-2$, devemos fazer $r = r_1+r_2-d$ e $q = q_1+q_2+1$

Seja N um número de n algarismos $a_{n-1},...,a_2$, a_1 e a_0

$N = 10^{n-1}.a_{n-1} + ... + 10^2.a_2 + 10^1.a_1 + 10^0.a_0$

Seja $S = a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0$ a soma dos algarismos de N

$N - S = (10^{n-1}-1).a_{n-1} + ... + (10^2-1).a_2 + (10^1-1).a_1 + (10^0 - 1).a_0$

Mas $10^n - 1$ é múltiplo de 9 (número formado por apenas n algarismos 9)

Assim, N – S é múltiplo de 9 e N será múltiplo de 9 se e só se S for múltiplo de 9 (se a soma dos algarismos de N for múltipla de 9).

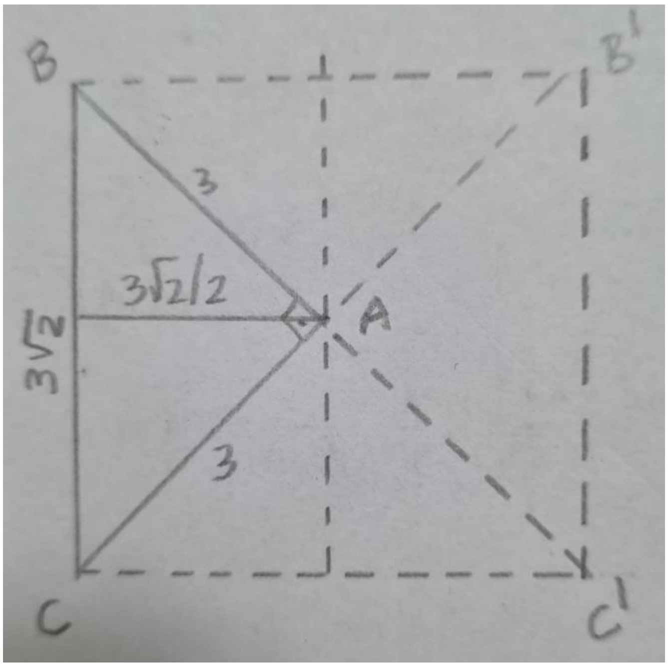
2) $y = x^2 + 7x/2 - 2$ → raízes = $\frac{-\frac{7}{2}\pm\sqrt{(\frac{7}{2})^2-4.1.(-2)}}{2} = \frac{-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}}}{2} = \frac{-\frac{7}{2}\pm\frac{9}{2}}{2} = -4\ ou\ +\frac{1}{2}$

Concavidade para cima:

		–4		1/2	
y	+	0	–	0	+

$x < -4$ ou $x > 1/2$

3) O volume desejado pode ser visto como o volume do cilindro BB'CC' menos o volume dos cones iguais ABB' e ACC'



$V = \pi\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2(3\sqrt{2}) - 2.\frac{\pi}{3}.\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2(3\sqrt{2}) = \frac{2}{3}\pi\frac{9}{2}(3\sqrt{2}) = 9\pi\sqrt{2}\,m^3$

4) Se 90º < x < 180º, então x é de 2º quadrante, senx > 0, – 1 < cosx < 0 e 0 < 1 + cosx < 1.

tgx + senx = senx/cosx + senx = (senx + senx.cosx)/cosx = senx.(1+cosx)/cosx

"+"."+"/"–" = "–" → o sinal é negativo

Terceira Parte

1) Vamos usar a regra de Cramer

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 + m + m = 2m + 2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & m & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 2m = 2m + 6$$

x = D_x/D = (2m+6)/(2m+2) = (m+3)/(m+1)

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 4 - 2m = -2m + 2$$

y = D_y/D = (–2m+2)/(2m+2) = (–m+1)/(m+1)

$$D_z = \begin{vmatrix} m & 1 & 4 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2m^2 - 4 - 2 - 4m = 2m^2 - 4m - 6$$

$z = D_z/D = (2m^2 - 4m - 6)/(2m+2) = (m^2 - 2m - 3)/(m+1) = (m-3)(m+1)/(m+1)$

Se $m+1 = 0$, ou seja, $m = -1$, então $x = 2/0$, $y = 2/0$, $z = 0/0$ e o sistema é impossível

Isso pode ser visto substituindo $m = -1$ nas equações:

$-x + y - z = 4$ (i)

$x - y + z = 0$ (ii)

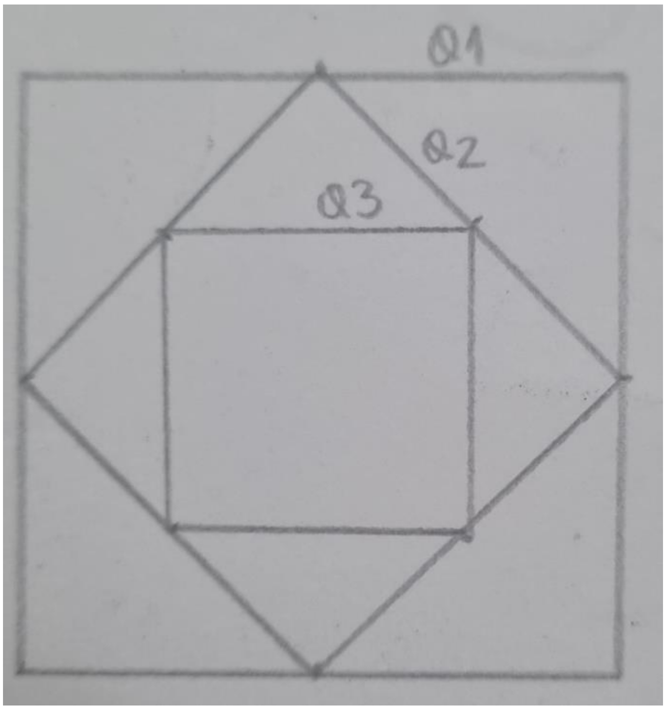
$x - y = 2$ (iii)

Somando (i) e (ii), $0 = 4$, impossível

Resposta: sistema possível e determinado para $m \neq -1$ e impossível para $m = -1$

2a) É a soma infinita dos termos de uma progressão geométrica de termo inicial 1 e razão 1/2, que dá $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

2b)



A área de Q_1 é a^2

O lado de Q_2 é $(\frac{a}{2})\sqrt{2}$, logo, a área de Q_2 é $a^2/2$

O lado de Q_3 é $\left(\frac{a}{4}\right)\sqrt{2}.\sqrt{2} = a/2$, logo, a área de Q_3 é $a^2/4$

A soma das áreas de Q_1 a Q_n é a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de termo inicial a^2 e razão 1/2:

$$S = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a^2((\frac{1}{2})^n - 1)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{a^2(\frac{1-2^n}{2^n})}{-\frac{1}{2}} = -2a^2\left(\frac{1-2^n}{2^n}\right) = 2a^2\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)$$