INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

EXAME DE ADMISSÃO DE MATEMÁTICA

ANO DE 1952

Observações: Duração da Prova - 3 horas. Não é permitido o uso de livros, apontamentos ou táboas de logarítmos.

1ª Parte

1 - Definir números primos entre sí.

2 - Definir resto da divisão de números inteiros

3 - Definir sucessão divergente a mais infinito.

4 - Desenvolver $(x^2+1)^4$ pela fórmula do binômio de Newton.

5 - Definir reta perpendicular a um plano.

6 - Definir círculo máximo de uma esfera.

7 - Dar o desenvolvimento de $\cos(a-b)$ em função de $\operatorname{sen} a$, $\cos a$, $\operatorname{sen} b$, $\cos b$.

8 - Quais são as raizes da equação $(x-1)(x-2)(x+\frac{1}{2}) = 0$?

2ª Parte

1 - Passar o número 2138 escrito no sistema (de numeração) de base 10 para o sistema (de numeração) de base 8.

2 - Resolver a inequação $7x - 10 > x^2$.

3 - Calcular a área da secção feita numa esfera de 2m de raio por um plano que diste 0,8m do centro.

4 - Calcular tang 15°. Sugestão: $15 = 45 - 30$.

3ª Parte

1 - Demonstrar que todo número complexo de módulo unitário pode ser escrito na forma

$$\frac{a+i}{a-i}$$

onde a é um número real.

2 - Calcular o $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

--- 0 ---

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA – ITA

PROVA DE MATEMÁTICA – 1952 – SOLUÇÕES – BOTELHO

1ª Parte

1) Dois números são primos entre si quando o único divisor comum entre eles é 1.

2) Dado um inteiro "a" e um inteiro não nulo "d", o resto da divisão de inteiros é o inteiro "r" tal que $a = q.d + r$ e $0 \le r < |d|$, onde "q" é um inteiro chamado quociente.

3) Uma sucessão é divergente a mais infinito quando, para todo número real $L > 0$, existe um natural p tal que, para todo n natural, se $n > p$, então o termo geral $a_n > L$.

4) $(x^2+1)^4 = x^8 + 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 1$

5) Reta perpendicular a um plano é a reta concorrente com plano que é perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo ponto de interseção da reta com o plano e ortogonal às demais retas do plano (que não passam pelo ponto de interseção).

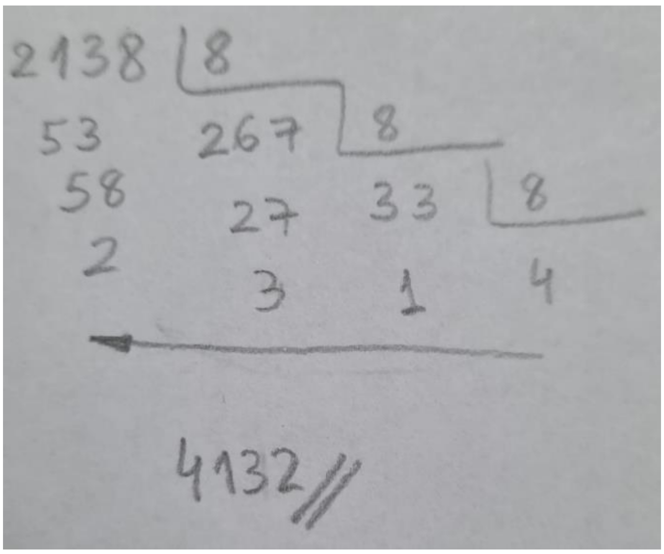
6) Círculo máximo de uma esfera é o círculo resultante da seção de uma esfera por um plano secante que contém o centro da esfera

7) $\cos(a - b) = \cos a.\cos b + \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$

8) As raízes são 1, 2 e $-1/2$

2ª Parte

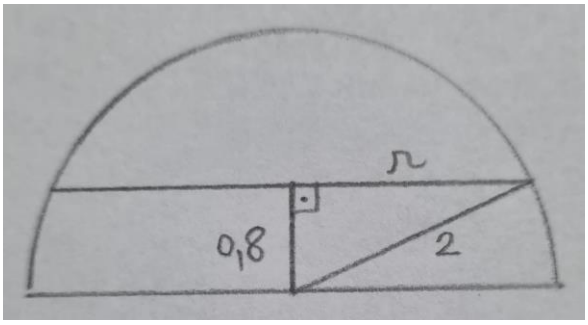
1)



2) $7x - 10 > x^2 \rightarrow x^2 - 7x + 10 < 0 \rightarrow (x - 2)(x - 5) < 0 \rightarrow 2 < x < 5$

		2		5	
x – 2	–	0	+	+	+
x – 5	–	–	–	0	+
Produto	+	0	–	0	+

3)



Área = $\pi.r^2 = \pi.(2^2 - 0{,}8^2) = \pi.(4 - 0{,}64) = 3{,}36.\pi\ m^2$

4) tg 15º = tg (45º – 30º) = $\frac{tg45º - tg30º}{1+tg45ºtg30º} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3} = 2 - \sqrt{3}$

<u>3ª Parte</u>

1) Seja z = c + di, d≠0, um complexo de módulo unitário ($c^2+d^2=1$)

$$z = \frac{(c+di)(a-i)}{a-i} = \frac{(ac+d)+(ad-c)i}{a-i}$$

Seja “a” tal que ad – c = 1, logo a = (c+1)/d

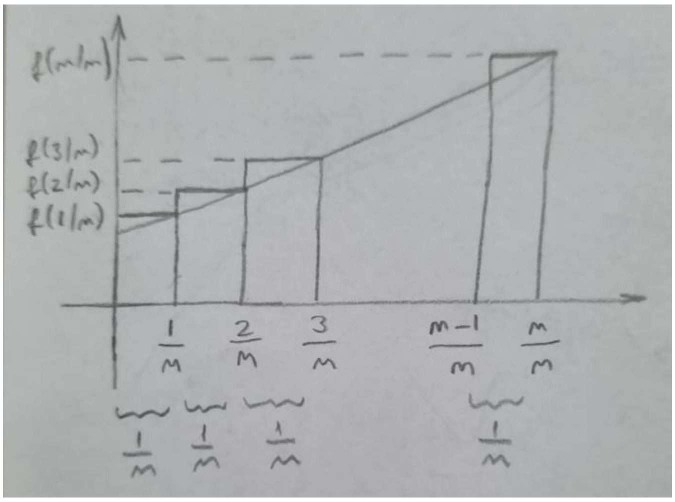
Daí, ac+d = $(c^2+c)/d + d = (c + c^2 + d^2)/d = (c+1)/d = a$

Assim, todo número complexo de módulo unitário c+di pode ser escrito na forma (a+i)/(a–i), desde que a = (c+1)/d

2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1.2.3\ldots n}{n.n.n\ldots n}} = L$$

$$ln\ L = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\sqrt[n]{\frac{1.2.3\ldots n}{n.n.n\ldots n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\left[ln\left(\frac{1}{n}\right) + ln\left(\frac{2}{n}\right) + ln\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + ln\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

Este último limite é a soma de Riemann que calcula a área sob o gráfico da função f(x) = lnx de x = 0 até x = 1, que é $\int_0^1 lnx.dx = [x.lnx - x]_0^1 = 1.ln1 - 1 - 0 + 0 = -1$



Se ln L = –1, então L = 1/e