CONCURSO DE ADMISSÃO AO CURSO DE FORMAÇÃO E GRADUAÇÃO

MATEMÁTICA

CADERNO DE QUESTÕES

2018/2019

1ª QUESTÃO **Valor: 1,0**

Um jogo de dominó possui 28 peças com duas pontas numeradas de zero a seis, independentemente, de modo que cada peça seja única, conforme ilustra a Figura 1.

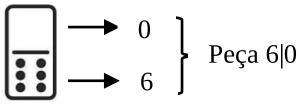

Figura 1

O jogo se desenrola da seguinte forma:

1- Quatro jogadores se posicionam nos lados de uma mesa quadrada.
2- No início do jogo, cada jogador recebe um conjunto de 7 peças, de forma aleatória, de modo que somente o detentor das peças possa ver seu conteúdo.
3- As ações ocorrem por turnos no sentido anti-horário.
4- O jogador com a peça 6|6 coloca-a sobre a mesa e em seguida cada jogador, na sua vez, executa uma de duas ações possíveis:
    a. Adiciona uma de suas peças de forma adjacente a uma das duas extremidades livres do jogo na mesa, de modo que as peças sejam encaixadas com pontas de mesmo valor.
    b. Passa a vez, caso não possua nenhuma peça com ponta igual a uma das extremidades livres da mesa.
5- Vence o jogo o primeiro jogador que ficar sem peças na mão.

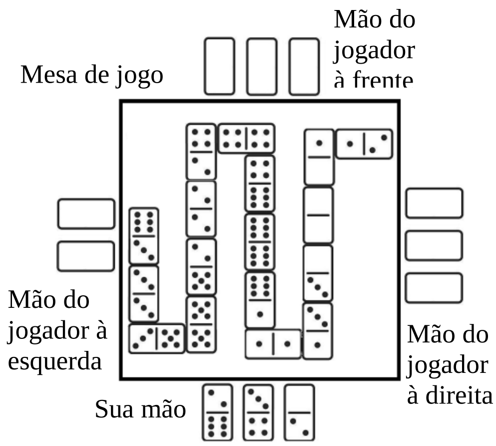

Figura 2

No jogo da Figura 2, é a sua vez de jogar e você constatou que o jogador à sua direita não possui peças com ponta 5 e o jogador à sua frente não possui peças com ponta 0. Você analisou todas as possíveis configurações de peças que os jogadores podem ter em suas mãos e decidiu jogar de modo a garantir que uma das pontas livres da mesa só possa ser usada por uma peça de sua posse, e que esta será a sua última peça em mão. Ao utilizar essa estratégia:

a) Quantas configurações de peças nas mãos dos jogadores garantem a vitória do jogo a você?

b) Esta quantidade corresponde a qual percentual do total de configurações possíveis?

<u>Observação:</u>

- A ordem das peças na mão de um jogador não importa.

2ª QUESTÃO **Valor: 1,0**

Definimos a função $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(2n) = f(n), \quad n \geq 1 \\ f(2n+1) = f(n) + 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}, \; n \geq 1 \end{cases}$$

Determine $f(f(2019))$.

Observação: $\lfloor k \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a k.

3ª QUESTÃO	**Valor: 1,0**

Dadas as funções definidas nos reais $\mathbb{R}$:

$f_1(x) = e^x, f_2(x) = sen(x)\ , f_3(x) = cos(x)\ , f_4(x) = sen(2x)$ e $f_5(x) = e^{-x}$.

Mostre que existe uma única solução a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, tal que:

$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) + a_4 f_4(x) + a_5 f_5(x)$ seja a função constante nula, onde $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \epsilon\ \mathbb{R}$.

4ª QUESTÃO	**Valor: 1,0**

Seja Z um número complexo tal que $\frac{2Z}{\bar{Z}i}$ possui argumento igual a $3\pi/4$ e $log_3(2Z + 2\bar{Z} + 1) = 2$. Determine o número complexo Z.

5ª QUESTÃO	**Valor: 1,0**

Mostre que os números 16, 24 e 81 podem pertencer a uma PG e obtenha a quantidade de termos dessa PG, sabendo que seus elementos são números naturais.

6ª QUESTÃO	**Valor: 1,0**

Seja o polinômio $q(x) = x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x + 25 + k$ que possui valor mínimo igual a -64, onde k é uma constante real. Determine as raízes de $q(x)$.

7ª QUESTÃO	**Valor: 1,0**

Determine todas as soluções da equação

$$4\ sen^2(7x) \cdot \cos(2x) + 2\ sen(9x) + 8\ sen^2(x) + 5\cos(2x) + 2\ sen(5x) = 4$$

no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right]$.

8ª QUESTÃO	**Valor: 1,0**

A reta r é normal à cônica C, de equação $9x^2 - 4y^2 = 36$, no ponto A $= \left(3, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ e intercepta o eixo das abscissas no ponto B. Sabendo que F é o foco da cônica C mais próximo ao ponto A, determine a área do triângulo ABF.

9ª QUESTÃO	**Valor: 1,0**

Uma corda CD corta o diâmetro AB de um círculo de raio R no ponto E. Sabendo que o ângulo $A\hat{B}C = 30^o$ e que $\overline{EC} = R\sqrt{2}$, calcule a medida do segmento $\overline{ED}$.

10ª QUESTÃO	**Valor: 1,0**

Um cubo com diagonal principal $\overline{AG}$ é interceptado pelo plano α, perpendicular à $\overline{AG}$, formando uma seção hexagonal regular. Calcule, em função da aresta a do cubo:

a) o apótema dessa seção hexagonal;

b) o raio da esfera que é tangente a essa seção e às faces do cubo que contém o vértice A.