1ª Questão: Valor: 1,0

Resolva a equação $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 25x - 26 = 0$ sabendo que uma das raízes é $3 + 2i$, onde $i = \sqrt{-1}$

2ª Questão: Valor: 1,0

Sabendo que $i = \sqrt{-1}$, calcule: $1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \ldots + 21i^{20}$

3ª Questão: Valor: 1,0

Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{se } x < \pi/3 \\ ax + b, & \text{se } x > \pi/3 \end{cases}$$

a) Encontre os valores de a e b de modo que $f'(\pi/3)$ exista

b) Esboce o gráfico da função obtida.

4ª Questão: Valor: 1,0

Sejam dois círculos, com mesmo raio R, tais que o centro de um esteja situado sobre a circunferência do outro. Determine:

a) As equações das tangentes aos dois círculos nos pontos de interseção

b) O ângulo entre essas tangentes nos pontos de interseção.

5ª Questão: Valor: 1,0

Determine a área limitada pelo eixo das abscissas, pela curva $y = x^4 - 2x^2$ e pelas retas $x = \pm 2\sqrt{2}$

6ª Questão: Valor: 1,0

Determine se a série $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4}$ converge ou não e, em caso de convergência, calcule sua soma.

1

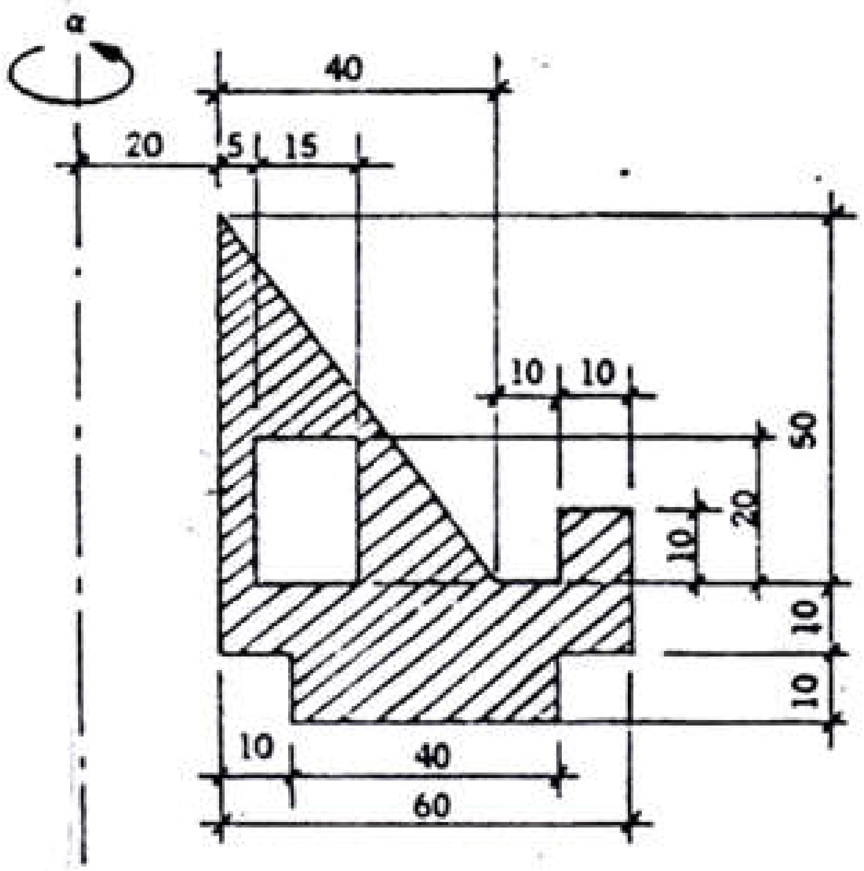
7ª Questão: Valor: 1,0

Sabendo que x é o ângulo interno de um triângulo ABC, dê todas as soluções possíveis da seguinte equação:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x = 0$$

8ª Questão: Valor: 1,0

Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da figura plana abaixo em torno do eixo α.

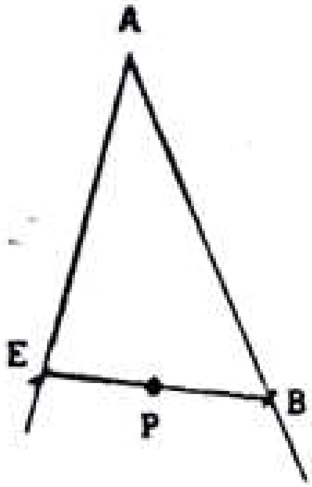


2

9ª Questão: Valor: 1,0

a) São dados um ângulo de vértice A e um ponto fixo P no seu interior. Uma reta variável contendo P intercepta os lados do ângulo A nos pontos B e E, conforme mostrado na figura abaixo.

Prove que a soma dos inversos das áreas dos triângulos APB e APE é constante.



b) Num triângulo ABC três cevianas AD, BE e CF concorrem num ponto interior P. Prove que a soma dos inversos das áreas dos triângulos APE, PCD, PBF é igual à soma dos inversos das áreas dos triângulos PCE, PBD e PAF.

10ª Questão: Valor: 1,0

Determine o maior termo no desenvolvimento de $\left(1+\frac{3}{4}\right)^{18}$, utilizando os conceitos do binômio de Newton.

IME - 94/95 - MILITARES

GABARITO DA PROVA DE MATEMÁTICA

1ª QUESTÃO :

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 25x - 26 = 0$$

coeficientes reais ; $3+2i$ é raiz $\Rightarrow$ $3-2i$ tb é raiz

raízes: $a, b, 3+2i, 3-2i$

$$S_1 = -\frac{a_1}{a_0} \Rightarrow a + b + 3 + \cancel{2i} + 3 - \cancel{2i} = 5 \Rightarrow a+b=-1$$

$$S_4 = \frac{a_4}{a_0} \Rightarrow ab\,\underbrace{(3+2i)(3-2i)}_{13} = -26 \Rightarrow ab=-2$$

$\Rightarrow$ a e b são raízes de $x^2 + x - 2 = 0$

$\Rightarrow$ $a = 1$ e $b=-2$ (ou vice-versa)

Resp: As raízes são $3+2i$, $3-2i$, 1 e -2

2ª QUESTÃO

$$S = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \ldots + 21\, i^{20}$$

$$\ominus \quad iS = \quad i + 2i^2 + 3i^3 + \ldots + 20\, i^{20} + 21\, i^{21}$$

$$(1-i)S = \underbrace{1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{20}}_{PG\ (q=i)} - 21\, i^{21}$$

$$i^1 = 1$$

$$(1-i)\,S = \frac{i^{20}\cdot i - 1}{i-1} - 21\,i = \frac{i^{21} - 1}{i-1} - 21\,i$$

$$(1-i)\,S = \frac{i-1}{i-1} - 21\,i = 1 - 21\,i$$

$$S = \frac{1-21\,i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i-21\,i-21\,i^2}{1-i^2} = \frac{22-20i}{2} = \boxed{11-10i}$$

3ª QUESTÃO:

a) f deve ser contínua em $\pi/3$; daí:

$$\lim_{x\to\pi/3^-} f(x) = \lim_{x\to\pi/3^+} f(x) = f(\pi/3)$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}a + b = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3}a + b = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{I}$$

$$\lim_{x\to\pi/3^-} \frac{f(x)-f(\pi/3)}{x-\pi/3} = f'_-(\pi/3) = \lim_{x\to\pi/3^-} \frac{\operatorname{sen}x - \sqrt{3}/2 \to 0}{x-\pi/3 \to 0} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\pi/3^-} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{2}$$

L'Hôpital

$$\lim_{x\to\pi/3^+} \frac{f(x)-f(\pi/3)}{x-\pi/3} = f'_+(\pi/3) = \lim_{x\to\pi/3^+} \frac{ax+b-\sqrt{3}/2 \to 0}{x-\pi/3 \to 0} = a$$

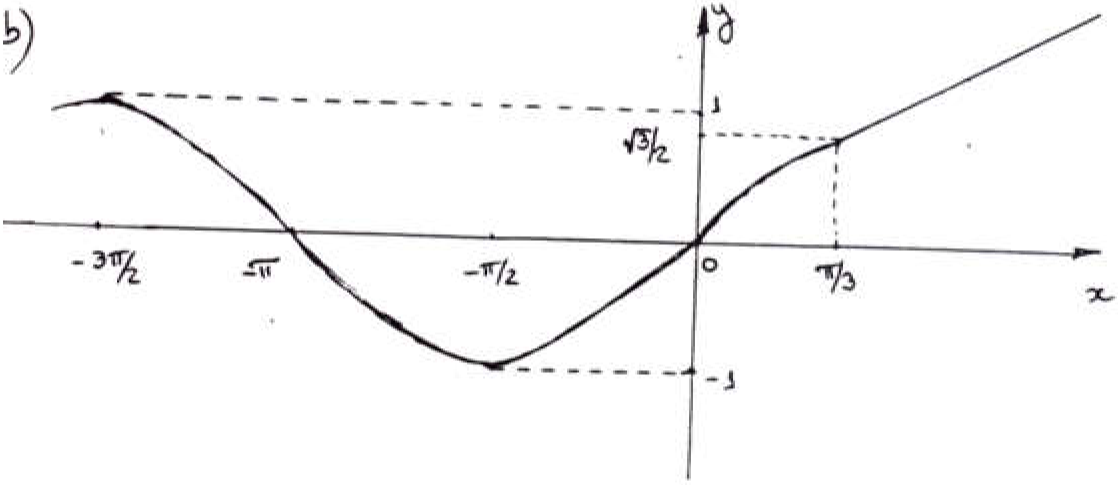
$$\lim_{x\to\pi/3^+} \frac{a}{1} = a$$

L'Hôpital

Para que $f'(\pi/3)$ exista: $\boxed{a = 1/2}$ II

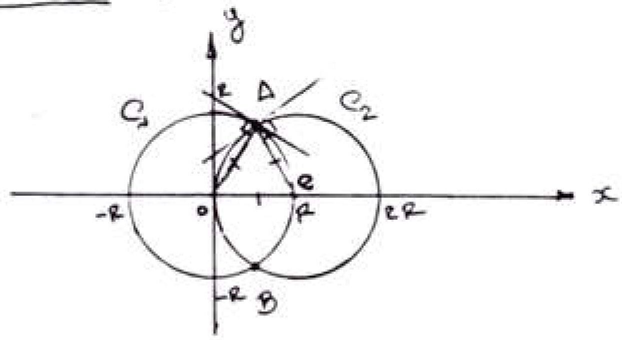
II em I: $\boxed{b = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}}$ $\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}x, & x \le \pi/3 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}, & x > \pi/3 \end{cases}$

b)



4ª QUESTÃO :

a)



$C_1 : x^2 + y^2 = R^2$ (I)

$C_2 : (x-R)^2 + y^2 = R^2$ (II)

$C_1 \cap C_2$: Subtraindo membro a membro, temos : $2Rx - R^2 = 0$

$\Rightarrow x = R/2$

Em (I) : $R^2/4 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \pm R\sqrt{3}/2 \Rightarrow$ $A(R/2, R\sqrt{3}/2)$ $B(R/2, -R\sqrt{3}/2)$

$m_{OA} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{R\sqrt{3}/2}{R/2} = \sqrt{3} \Rightarrow m_{t_{1A}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$m_{AC} = tg\, 120° = -\sqrt{3} \Rightarrow m_{t_{2A}} = -\frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Logo, as equações das tangentes são :

Em A : $t_{1A} : y - \frac{R\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{R}{2}\right)$

$t_{2A} : y - \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{R}{2}\right)$

Analogamente, em B : $t_{1B} : y + \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{R}{2}\right)$

$t_{2B} : y + \frac{R\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{R}{2}\right)$

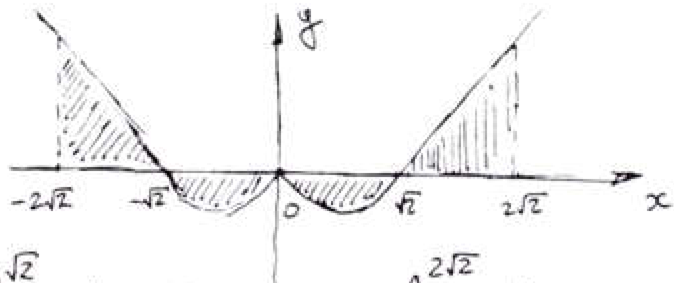
b) $tg\,\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}/3 - (-\sqrt{3}/3)}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}\right| = \frac{2\sqrt{3}/3}{2/3} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \boxed{\theta = 60°}$

5ª QUESTÃO :

$$y = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$$ FUNÇÃO PAR

raízes: $0, \pm\sqrt{2}$



$$S = 2\int_0^{\sqrt{2}} (-x^4 + 2x^2)\,dx + 2\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} (x^4 - 2x^2)\,dx =$$

$$= 2\left[-\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} + 2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3}\right]_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} =$$

$$= 2\left(-\frac{4\sqrt{2}}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) + 2\left[\left(\frac{128\sqrt{2}}{5} - \frac{32\sqrt{2}}{3}\right) - \left(\frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)\right] =$$

$$= 48\sqrt{2} - 16\sqrt{2} = \boxed{32\sqrt{2}} \text{ u.a.}$$

6ª QUESTÃO :

$$\frac{1}{n^2-4} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n-2} \Rightarrow A(n-2) + B(n+2) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = 1/4 \\ A = -1/4 \end{cases}$$

$$\sum_{n=3}^{K} \frac{1}{n^2-4} = \sum_{n=3}^{K} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \cancel{\frac{1}{5}}\right)$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{6}}\right)$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{7}}\right)$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)$$

$$\frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{1}{5}} - \frac{1}{9}\right)$$

$$\frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{1}{6}} - \frac{1}{10}\right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{K-2} - \frac{1}{K+2}\right)$$

Fazendo $K \to \infty$:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{12+6+4+3}{12} = \boxed{\frac{25}{48} \quad \text{(CONVERGE)}}$$

(pode-se formalizar um pouco mais)

7ª Questão:

$0° < x < 180°$

$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} 2x \cos x + \operatorname{sen} 2x = 0$

$\operatorname{sen} 2x\,(2\cos x + 1) = 0 \rightarrow \operatorname{sen} 2x = 0$ ou $\cos x = -1/2$

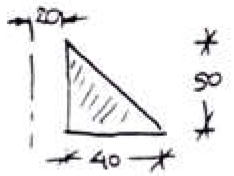
$2x = 180°k$ ou $x = 360°k + 120°$ ou $x = 360°k + 240°$

$x = 90°k$ (só serve $k=0$) (nenhum valor de $k \in \mathbb{Z}$ satisfaz)

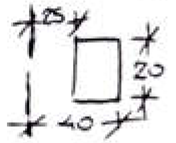
(só serve $k=1$)

$\rightarrow \boxed{x = 90° \text{ ou } x = 120°}$

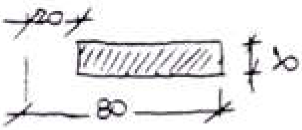
8ª Questão:



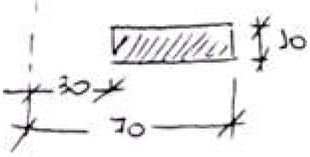
$$V_1 = \frac{\pi \times 50}{3}(20^2 + 60^2 + 20\times 60) - \pi \times 50 \times 20^2 = \frac{\pi \times 50 \times (5200 - 1200)}{3} = \frac{\pi \times 50 \times 4000}{3}$$



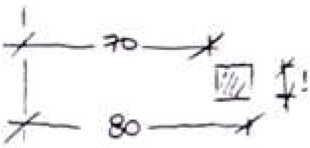
$$V_2 = \pi \times 20\,(40^2 - 25^2) = \pi \times 20 \times 975 = \pi \times 10 \times 1950$$



$$V_3 = \pi \times 10\,(80^2 - 20^2) = \pi \times 10 \times 6000$$



$$V_4 = \pi \times 10\,(70^2 - 30^2) = \pi \times 10 \times 4000$$



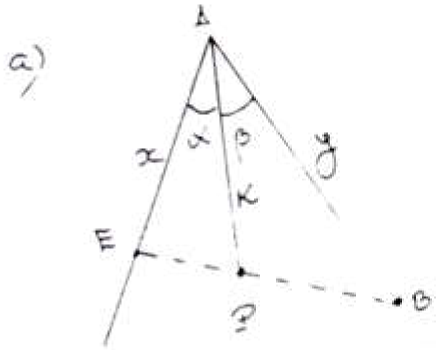
$$V_5 = \pi \times 10\,(80^2 - 70^2) = \pi \times 10 \times 1500$$

$$V = V_1 - V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = \frac{\pi \times 10}{3}(20000 - 5850 + 18000 + 12000 + 4500)$$

$$= \frac{\pi \times 10 \times 48650}{3} = \boxed{\frac{486500\pi}{3}}$$

9ª QUESTÃO:

a)



Façamos:

$E\hat{A}P = \alpha$, $B\hat{A}P = \beta$, $AP = K$ (constantes)

$AE = x$, $AB = y$ (variáveis)

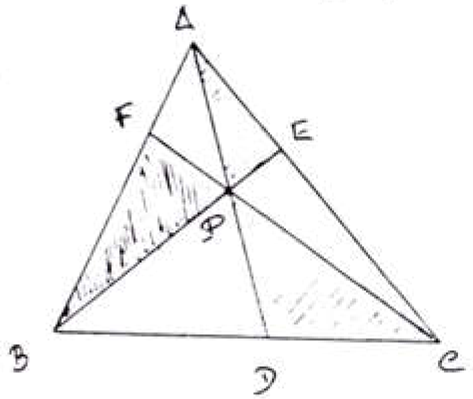
Temos: $S_{APB} + S_{APE} = S_{EAB} \Rightarrow \frac{1}{2} Kx\,sen\,\alpha + \frac{1}{2} Ky\,sen\,\beta = \frac{1}{2} xy\,sen(\alpha+\beta)$

$\Rightarrow x\,sen\,\alpha + y\,sen\,\beta = \frac{xy}{K}\,sen(\alpha+\beta)$

Daí: $$\frac{1}{S_{APB}} + \frac{1}{S_{APE}} = \frac{2}{Kx\,sen\,\alpha} + \frac{2}{Ky\,sen\,\beta} = \frac{2}{K}\left(\frac{1}{x\,sen\,\alpha} + \frac{1}{y\,sen\,\beta}\right) =$$

$$= \frac{2}{K} \cdot \frac{y\,sen\,\beta + x\,sen\,\alpha}{x\,sen\,\alpha \cdot y\,sen\,\beta} = \frac{2}{K} \cdot \frac{xy\,sen(\alpha+\beta)}{Kxy\,sen\,\alpha\,sen\,\beta} = \frac{2\,sen(\alpha+\beta)}{K^2\,sen\,\alpha\,sen\,\beta} = \text{const.}$$

b)



Aplicando sucessivamente o teorema do item a, temos:

$$\frac{1}{S_{PAE}} + \frac{1}{S_{PAB}} = \frac{1}{S_{PAF}} + \frac{1}{S_{PAC}} \quad \text{(I)}$$

$$\frac{1}{S_{PBF}} + \frac{1}{S_{PBC}} = \frac{1}{S_{PBD}} + \frac{1}{S_{PAB}} \quad \text{(II)}$$

$$\frac{1}{S_{PCD}} + \frac{1}{S_{PAC}} = \frac{1}{S_{PCE}} + \frac{1}{S_{PBC}} \quad \text{(III)}$$

Somando membro a membro:

$$\frac{1}{S_{PAE}} + \frac{1}{S_{PBF}} + \frac{1}{S_{PCD}} + \cancel{\frac{1}{S_{PAB}}} + \cancel{\frac{1}{S_{PBC}}} + \cancel{\frac{1}{S_{PAC}}} = \frac{1}{S_{PAF}} + \frac{1}{S_{PBD}} + \frac{1}{S_{PCE}} + \cancel{\frac{1}{S_{PAC}}} + \cancel{\frac{1}{S_{PAB}}} + \cancel{\frac{1}{S_{PBC}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{S_{PAE}} + \frac{1}{S_{PBF}} + \frac{1}{S_{PCD}} = \frac{1}{S_{PAF}} + \frac{1}{S_{PBD}} + \frac{1}{S_{PCE}}$$

CQD

10ª Questão:

$$\left(\underset{\overset{\shortparallel}{x}}{1} + \underset{\overset{\shortparallel}{\Delta}}{\frac{3}{4}}\right)^{18} \qquad T_{p+1} = C_{18}^{p} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{p} \cdot 1^{18-p}$$

$$T_{p+1} = \frac{18!}{p!\,(18-p)!} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{p}$$

$$T_{p} = \frac{18!}{(p-1)!\,(19-p)!} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{p-1}$$

$$\rightarrow \quad \frac{T_{p+1}}{T_p} = \frac{19-p}{p} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{19}{p} - 1\right)$$

Vemos que $\frac{T_{p+1}}{T_p} > 1$, ou seja, $T_{p+1} > T_p$, se e só se

$\frac{3}{4}\left(\frac{19}{p} - 1\right) > 1$, e daí $p < \underbrace{57/7}_{=8,\ldots}$

Logo:

$$\left.\begin{array}{l} T_2 > T_1 \\ T_3 > T_2 \\ \ldots \\ T_9 > T_8 \\ T_{10} < T_9 \\ T_{11} < T_{10} \\ \ldots \end{array}\right\}$$

o maior termo é

$$\boxed{T_9 = C_{18}^{8} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{8}}$$