1ª Questão: Valor: 1,0

Determine o coeficiente de x^6 no desenvolvimento do binômio:

$$(x^2 - 2x^{-1})^8$$

2ª Questão: Valor: 1,0

Seja a parábola de equação $y^2 + 5x - 6y + 14 = 0$

Determine:

a. as coordenadas do vértice

b. o parâmetro

c. as coordenadas do foco

d. a equação da diretriz

3ª Questão: Valor: 1,0

Resolva a equação trigonométrica:

$$\cos 3x + \operatorname{sen} 3x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

4ª Questão: Valor: 1,0

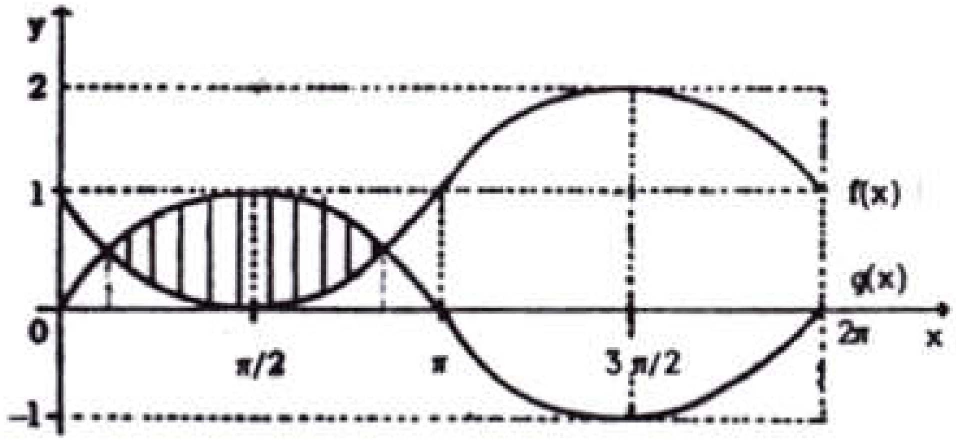
Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} 4 & 9 & A \\ 3 & B & 6 \\ C & 2 & 7 \end{pmatrix}$, determine A, B e C de modo que o determinante D, associado à matriz M, seja positivo e divisível por 7.

5ª Questão: Valor: 1,0

Sendo $c = a + b.i$, um número complexo conhecido, e $z = x + y.i$, um número complexo a determinar, ambos não nulos, tais que $c.z = b + a.i$, determine z.

6ª Questão: Valor: 1,0

Considere as funções senoidais $f(x)$ e $g(x)$ cujos gráficos são mostrados na figura abaixo. Calcular a área hachurada da figura.



7ª Questão: Valor: 1,0

Dada a função $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ pede-se:

a. os intervalos onde a função cresce ou decresce

b. os pontos de máximo, mínimo e inflexão

c. as assíntotas

d. o esboço do gráfico

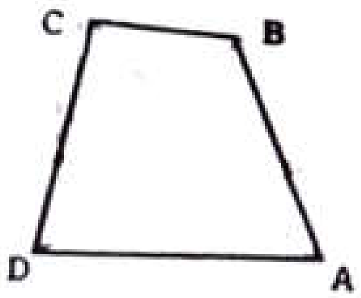
8ª Questão: Valor: 1,0

Prove que o polinômio $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ não admite raízes múltiplas.

9ª Questão: Valor: 1,0

A reta que une os pontos médios das diagonais do quadrilátero ABCD intercepta AB em P e CD em Q.

Prove que: $\frac{PA}{PB} = \frac{QC}{QD}$



10ª Questão: Valor: 1,0

Seja ABCDA'B'C'D' um cubo de aresta unitária. Com centro no ponto médio da diagonal, de cada uma das faces do cubo, são construídas esferas de mesmo raio que se tangenciam exteriormente. Sabendo-se que cada esfera tangencia outras quatro, calcule o volume da esfera que seja tangente exterior a todas as esferas contruídas.

1ª QUESTÃO) $(\underbrace{x^2}_{X} - \underbrace{2x^{-1}}_{A})^8$

$$T_{p+1} = C_8^p \; (-2x^{-1})^p \cdot (x^2)^{8-p} =$$

$$= C_8^p \cdot (-2)^p \cdot (x)^{-p} \cdot x^{16-2p} =$$

$$= C_8^p \cdot (-2)^p \cdot x^{16-3p} =$$

$$= \quad 16 - 3p = 6 \quad \Rightarrow 3p = 10 \quad \text{IMPOSSÍVEL}$$

$\Rightarrow$ O coeficiente de x^6 é $\boxed{\text{ZERO}}$

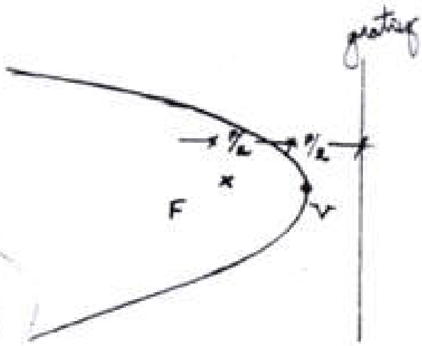
2ª QUESTÃO)

$$y^2 + 5x - 6y + 14 = 0$$

$$y^2 - 6y + 9 = -5x - 14 + 9 = -5x - 5$$

$$(y-3)^2 = -5(x+1)$$

$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$



a) $V(-1; 3)$

b) $2p = 5 \Rightarrow p = 5/2 \to p/2 = 5/4$

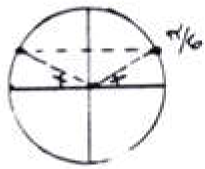
c) $F\left(\underbrace{-1 - 5/4}_{-9/4} ; 3\right)$

d) Δ: $x = -1 + 5/4 = 1/4$

3ª QUESTÃO

$$\cos 3x + \operatorname{sen} 3x = 1/\sqrt{2} \quad \left(\div \sqrt{2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} 3x = 1/2$$



$$\operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1/2$$

$$3x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi/6 \quad \text{ou} \quad 3x + \pi/4 = 2k\pi + \pi - \pi/6$$

$$3x = 2k\pi - \pi/12 \quad \text{ou} \quad 3x = 2k\pi + 7\pi/12$$

$$x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{36} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{7\pi}{36} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

4ª QUESTÃO

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 9 & A \\ 3 & B & 6 \\ C & 2 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{10}\cdot\begin{vmatrix} 400 & 90 & A \\ 300 & 10B & 6 \\ 100C & 20 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{1000}\begin{vmatrix} 400 & 90 & 49A \\ 300 & 10B & 3B6 \\ 100C & 20 & C27 \end{vmatrix}$$

$$\text{ou}\begin{cases} A = 0 & (490) \div 7 \\ A = 7 & (497) \div 7 \end{cases}$$

$$\underline{B = 3} \quad (336) \div 7$$

$$\underline{C = 4} \quad (427) \div 7$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 9 & 490 \\ 3 & 3 & 336 \\ 4 & 2 & 427 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 4 & 9 & 70 \\ 3 & 3 & 48 \\ 4 & 2 & 61 \end{vmatrix} = 7\cdot 9 = 63 \ (\underline{>0})$$

ou

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 9 & 497 \\ 3 & 3 & 336 \\ 4 & 2 & 427 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 4 & 9 & 71 \\ 3 & 3 & 48 \\ 4 & 2 & 61 \end{vmatrix} = 7\cdot 3 = 21 \ (\underline{>0})$$

Logo: $A = 0$ ou 7, $B = 3$, $C = 4$

5ª QUESTÃO)

$$c.z = b + ai$$

$$z = \frac{b+ai}{c} = \frac{b+ai}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi} =$$

$$= \frac{ab - b^2 i + a^2 i + ab}{a^2+b^2} =$$

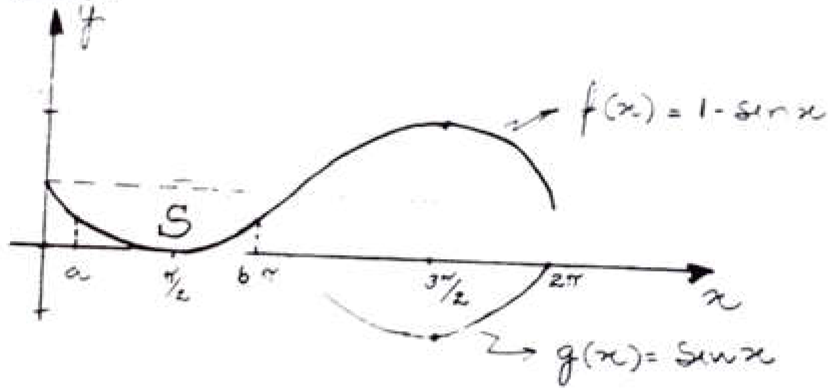
$$= \underbrace{\frac{2ab}{a^2+b^2}}_{x} + \underbrace{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}_{y}\, i$$

$a, b \in \mathbb{R}$

$x, y \in \mathbb{R}$

RESTRIÇÃO ; $a^2+b^2 \neq 0$

6ª QUESTÃO)



$$f(x) = g(x) \Rightarrow \operatorname{sen} x = 1 - \operatorname{sen} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x = 1/2 \Rightarrow \begin{cases} x = \pi/6 = a \\ \text{ou} \\ x = 5\pi/6 = b \end{cases}$$

$$S = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} [\operatorname{sen} x - (1 - \operatorname{sen} x)]\, dx = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (2\operatorname{sen} x - 1)\, dx = \Big[-2\cos x - x\Big]_{\pi/6}^{5\pi/6}$$

$$= -\Big[2\cos x + x\Big]_{\pi/6}^{5\pi/6} = -\left[\left(2\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{5\pi}{6}\right) - \left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= -\left[-2\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right] = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$$

7ª QUESTÃO)

$$f(x) = \frac{x}{e^x} = x\,e^{-x}$$

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = x \cdot e^{-x} \cdot (-1) + e^{-x} = e^{-x} \cdot (1-x)$$

PONTOS CRÍTICOS:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

|T1ªD|

		1	
f'	+	0	−
f	cresc.	|	decresc.

$M(1;\, e^{-1})$

$$f''(x) = e^{-x} \cdot (-1) + e^{-x} \cdot (-1) \cdot (1-x) = e^{-x}(x-1-1) =$$

$$= e^{-x} \cdot (x-2)$$

PONTOS CRÍTICOS PARA INFLEXÃO:

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

|T2ªD|

		2	
f''	−	0	+
	côncava	|	convexa

$I(2;\, 2e^{2})$.

a) f é crescente em $]-\infty, 1]$; f é decrescente em $[1, +\infty[$

b) Ponto de máximo local: $M(1, e^{-1})$
Ponto de inflexão: $I(2, 2e^{-2})$

c) Assíntota vertical: não há

→ Ass em $+\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \text{ "="} \frac{+\infty}{+\infty} = 0$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ — L'Hôpital

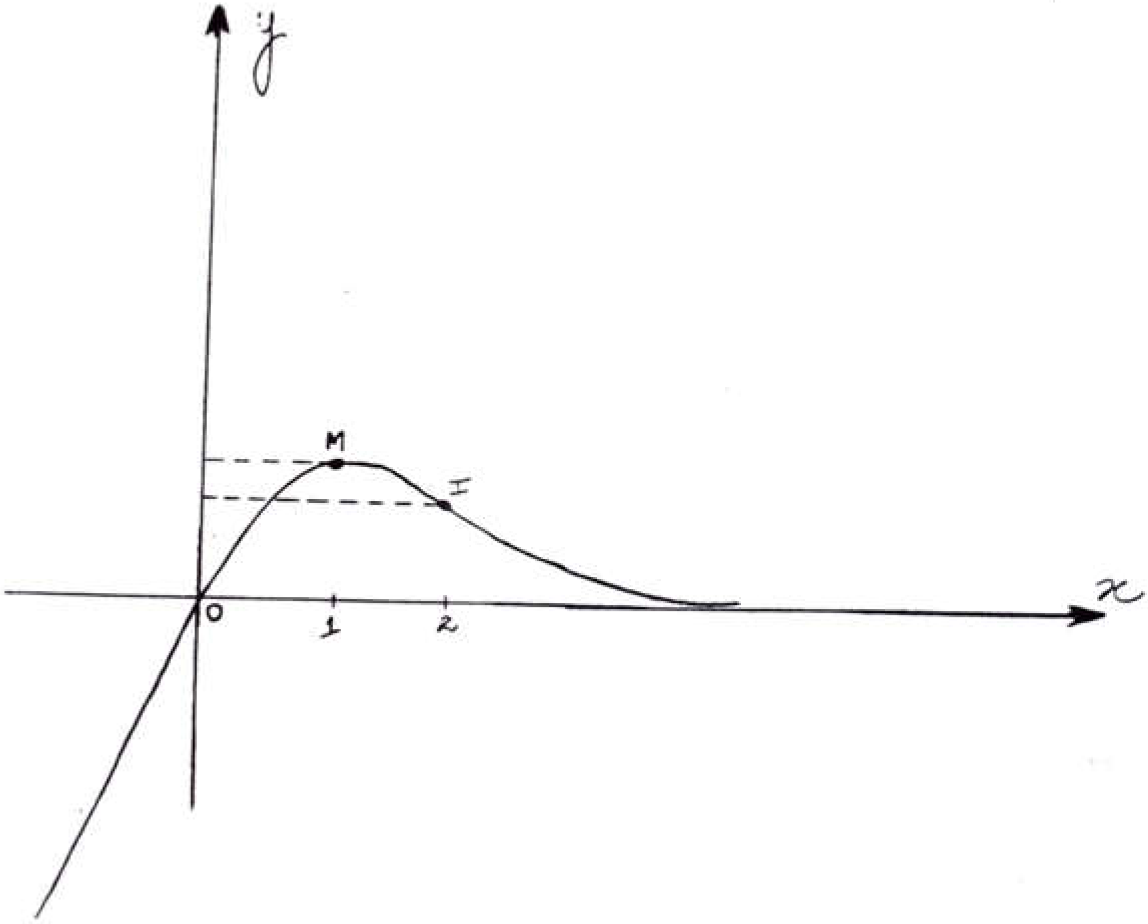
$$\boxed{\text{a reta } y = 0 \text{ é assíntota (horizontal) em } +\infty}$$

→ Ass. em $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$$ (não tem assíntota horizontal em $-\infty$)

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$$ (não tem assíntota inclinada em $-\infty$)

d



8ª QUESTÃO)

$$P(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}$$

$$P'(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\Rightarrow P(x) = P'(x) + \frac{x^n}{n!}$$

Suponhamos que P possui alguma raiz múltipla de x_0; daí, x_0 também deve ser raiz de $P'(x)$, ou seja:

$$P(x_0) = 0 \quad e \quad P'(x_0) = 0$$

Mas: $P(x_0) = P'(x_0) + \frac{x_0^n}{n!} \Rightarrow \frac{x_0^n}{n!} = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

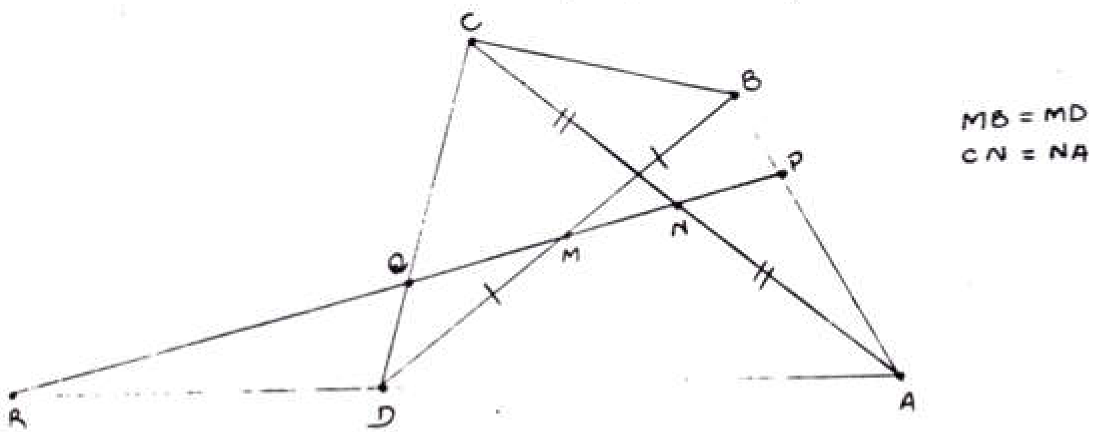
Mas: $P(x_0) = P(0) = 1 \neq 0$ (contradição)

Logo, P não possui raiz múltipla.

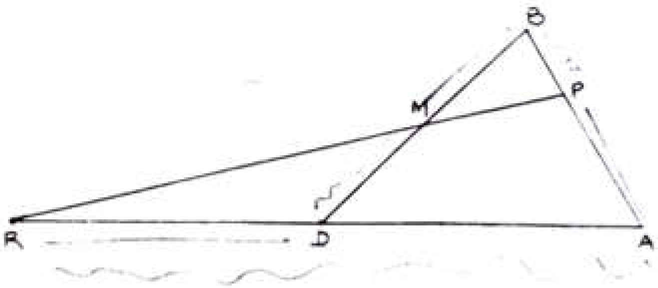
9ª QUESTÃO)

Se $QP // AD$, BC será $// DA$, e daí teremos um trapézio; assim, $\frac{PA}{PB} = 1 = \frac{QC}{QD}$

Se $QP \not\parallel AD$, seja R o ponto de interseção



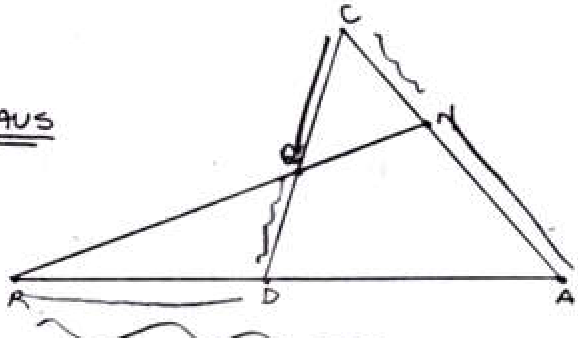
MENELAUS



$$RD\cdot PA\cdot MB = MD\cdot RA\cdot PB$$

$$\frac{PA}{PB} = \frac{\cancel{MD}\cdot RA}{\cancel{MB}\cdot RD} \quad \text{I}$$

MENELAUS



$$RD\cdot \cancel{AN}\cdot CQ = QD\cdot RA\cdot \cancel{N}$$

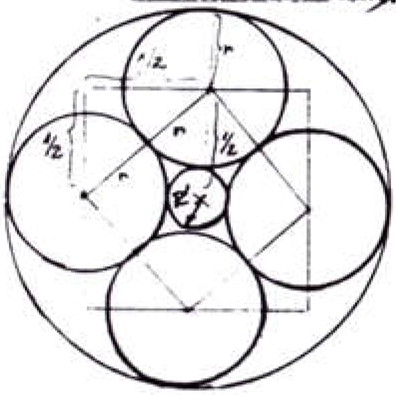
$$\frac{RA}{RD} = \frac{QC}{QD}$$

$$RD\cdot NA\cdot QC = QD\cdot RA\cdot NC$$

$$\frac{QC}{QD} = \frac{\cancel{NC}}{\cancel{NA}}\cdot\frac{RA}{RD} \quad \text{II}$$

$$\Rightarrow \text{De I e II} \Longrightarrow \boxed{\frac{PA}{PB} = \frac{QC}{QD}}$$

10ª QUESTÃO



$$2r = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{2}/4 \quad ; \quad R = r + \tfrac{1}{2} \Rightarrow R = \sqrt{2}/4 + \tfrac{1}{2} =$$

$$= \sqrt{2}/4 + 2/4 = \frac{(2+\sqrt{2})}{4} \quad ; \quad R' = \frac{1}{2} - r = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$V' = \frac{4}{3}\pi R'^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^3 = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{4^2}\cdot(2-\sqrt{2})(4+2-4\sqrt{2}) =$$

$$= \frac{2\pi}{3\times4\times4}\cdot(2-\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = \frac{\pi}{24}(6-4\sqrt{2}-3\sqrt{2}+4) = \frac{\pi}{24}(10-7\sqrt{2})$$

$$\boxed{V' = \frac{\pi}{24}\cdot(10-7\sqrt{2})}$$