IME - 91/92 - MILITARES

1ª Questão: Valor: 1,0

a) Determine o lugar geométrico definido por: $x^2 - 4x + 8y - 20 = 0$

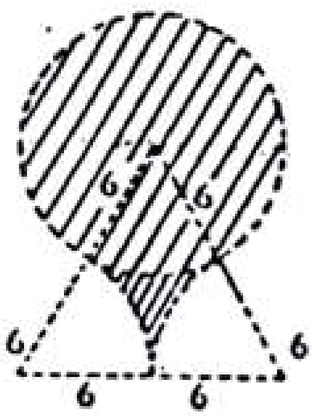
b) Faça um esboço do seu gráfico

2ª Questão: Valor: 1,0

Determine as soluções da equação $\cos(2x + \pi/3) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, sabendo que $x \in [0, 2\pi)$.

3ª Questão: Valor: 1,0

Calcule a área hachurada na figura abaixo:



4ª Questão: Valor: 1,0

Sejam A e B subconjuntos do conjunto universo U. Simplifique a expressão abaixo utilizando o diagrama de Venn ou propriedades das operações com conjuntos:

$\overline{\bar{A} \cap \bar{B}} \cap A \cup (B - A)$, onde o $\bar{A}$ indica complementar do conjunto A em relação a U.

5ª Questão: Valor: 1,0

O raio da base, a altura e a geratriz de um cone reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Determine esses elementos sabendo que o volume desse cone é $12\pi\ dm^3$.

6ª Questão: Valor: 1,0

Resolva a equação:

$$\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + \left(\log_3 x\right)^2 = 1$$

7ª Questão: Valor: 1,0

Determine o parâmetro a de modo que o sistema seja compatível:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 18 \\ 3x - y + 4z = 20 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ (a+1)x + (a+2)y + (a+3)z = 76 \end{cases}$$

8ª Questão: Valor: 1,0

Determine a forma polar do número complexo dado por:

$$(1 + \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^n, \ n \in Z^+, \ \alpha \in R$$

9ª Questão: Valor: 1,0

Dada a função $f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x$. Pede-se:

a) O domínio e a imagem de f

b) O intervalo no qual a função é contínua

c) A variação do sinal da 1ª e 2ª derivadas indicando o sentido da concavidade da curva

d) Os pontos extremos.

10ª Questão: Valor: 1,0

Sejam n, $k \in Z^+$

Chama-se potência fatorial de ordem k do número n o inteiro $n^{\overline{k}}$ obtido através da função

$$n^{\overline{k}} = \begin{cases} n(n+1)\ldots(n+k-1) & \text{para } k > 1 \\ n & \text{para } k = 1 \end{cases}$$

Demonstre que:

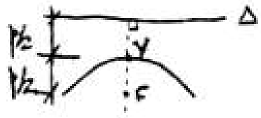
$$(n+1)^{\overline{k+1}} - n^{\overline{k+1}} = (n+1)^{\overline{k}}(k+1)$$

PROVA DE MATEMÁTICA - 1991/92 - CONCURSO DOS MILITARES - GABARITO - PROF. PAULO ROBERTO

1ª QUESTÃO

a) $x^2-4x+4 = -8y+20+4 \Rightarrow (x-2)^2 = -8(y-3)$

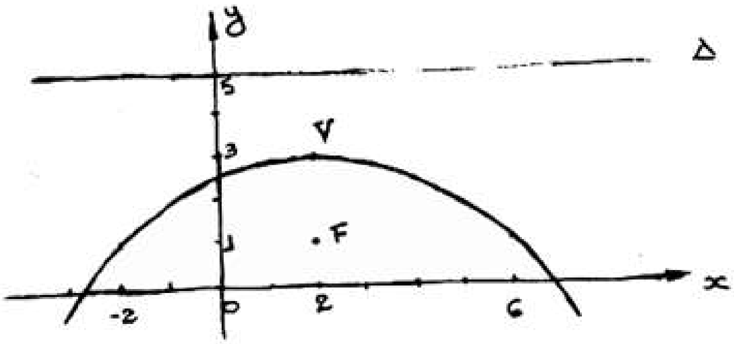
Parábola com concavidade p/ baixo (eixo vertical), vértice $V(2,3)$ e parâmetro $p = 8/2 = 4$



Foco: $F(2,1)$

diretriz: $\Delta: y=5$

b)



2ª QUESTÃO

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow 2x+\frac{\pi}{3} = 2k\pi+\frac{\pi}{4}$ ou $2x+\frac{\pi}{3} = 2k\pi-\frac{\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = k\pi-\frac{\pi}{24}$ ou $x = k\pi - \frac{7\pi}{24}$

Como $x\in[0,2\pi)$, só servem, em ambos os casos, $k=1$ e $k=2$;

daí: $x = \frac{23\pi}{24}$ ou $x = \frac{47\pi}{24}$ ou $x = \frac{17\pi}{24}$ ou $x = \frac{41\pi}{24}$

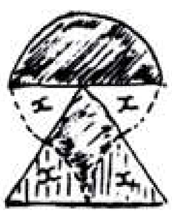
3ª QUESTÃO

$S_{\Delta} = \frac{\pi . 6^2}{6} = 6\pi$; $S_{\Delta} = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$

$S_{Y} = 36\sqrt{3} - 3.6\pi = 36\sqrt{3}-18\pi$

$S = S_{O}+S_{Y} = \pi.6^2 + 36\sqrt{3}-18\pi = 18\pi+36\sqrt{3} = 18(\pi+2\sqrt{3})$ u.a.

OUTRO MODO:



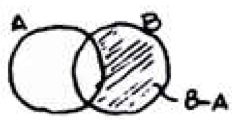
$S = S_{\frown}+S_{\Delta} = \frac{\pi.6^2}{2}+\frac{12^2\sqrt{3}}{4} =$

$= 18(\pi+2\sqrt{3})$ u.a.

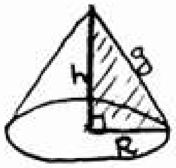
4ª QUESTÃO

$\overline{X\cap Y} = \bar{X}\cup\bar{Y}$ (Lei de De Morgan) ; daí: $\overline{\bar{A}\cap\bar{B}} = \bar{\bar{A}}\cup\bar{\bar{B}} = A\cup B$

$\Rightarrow \underbrace{(A\cup B)\cap A}_{A} \cup (B-A) = A\cup(B-A) = A\cup B$



$\boxed{\text{5ª QUESTÃO}}$



PA : $R,\ h,\ g$ (onde r é a razão da PA)
$\ \ \overset{\shortparallel}{h-r}\qquad \overset{\shortparallel}{h+r}$

Mas : $g^2 = h^2 + R^2 \rightarrow (h+r)^2 = h^2 + (h-r)^2$

$\cancel{h^2} + 2rh + \cancel{r^2} = \cancel{h^2} + h^2 - 2rh + \cancel{r^2} \rightarrow h^2 = 4rh \rightarrow \boxed{h = 4r} \rightarrow \boxed{R = 3r}$ $\boxed{g = 5r}$

$V = \dfrac{\pi R^2 h}{3} = 12\pi\ dm^3 \rightarrow \dfrac{\cancel{\pi}.\,9r^2.\,4r}{3} = 12\cancel{\pi}$

$\rightarrow r^3 = 1 \rightarrow r = 1\ (dm) \rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} R = 3\,dm \\ h = 4\,dm \\ g = 5\,dm \end{array}}$

$\boxed{\text{6ª QUESTÃO}}$

RESTRIÇÕES : $\left\{\begin{array}{l} x \neq 0 \\ 3x > 0 \\ 3x \neq 1 \\ x > 0 \end{array}\right. \leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq 1/3 \end{array}}$

Passando para a base 3 : $\dfrac{\log_3 3/x}{\log_3 3x} + (\log_3 x)^2 = 1$

$\dfrac{1 - \log_3 x}{1 + \log_3 x} = 1 - (\log_3 x)^2$; fazendo $z = \log_3 x$:

$\dfrac{1-z}{1+z} = 1 - z^2 \rightarrow 1 - z = (1-z)(1+z)^2 \rightarrow 1 - z = 0$ ou $1 = (1+z)^2$

$\rightarrow z = 1$ ou $z = 0$ ou $z = -2$

$\rightarrow \log_3 x = 1$ ou $\log_3 x = 0$ ou $\log_3 x = -2$

$\rightarrow \underline{x = 3}$ ou $\underline{x = 1}$ ou $\underline{x = 1/9}$ (satisfazem as restrições)

$\boxed{\text{7ª QUESTÃO}}$

x	y	z	TI
2	-3	5	18
3	-1	4	20
4	2	-1	5
	7	-7	-14
	16	-22	-62
	1	-1	-2
	8	-11	-31
		-3	-15

$\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y + 5z = 18 \\ \quad y - z = -2 \\ \quad -3z = -15 \end{array}\right. \begin{array}{l} \rightarrow x = 1 \\ \rightarrow y = 3 \\ \rightarrow z = 5 \end{array}$

Substituindo na 4ª equação : $(a+1) + (a+2).3 + (a+3).5 = 76$

$9a = 76 - 22 = 54 \rightarrow \boxed{a = 6}$

$\boxed{8^a \text{ QUESTÃO}}$ $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$; daí:

$$(1+\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^n = \left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} + i\,2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n = \left[2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)\right]^n =$$

$$= 2^n\cdot\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{cis}\frac{\alpha}{2}\right)^n = 2^n\cdot\cos^n\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{cis}\frac{n\alpha}{2}$$

Forma polar: $\boxed{2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\ \angle\frac{n\alpha}{2}}$

$\boxed{9^a \text{ QUESTÃO}}$ $f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x$ $\rightarrow$ $\text{Dom } f = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$

$f'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}$; como f é derivável em seu domínio, segue-se que f é contínua em seu domínio, ou seja, em $]0,+\infty[$.

Pontos críticos: $f'(x)=0 \rightarrow x=1$.
$\nexists f' \rightarrow$ não há

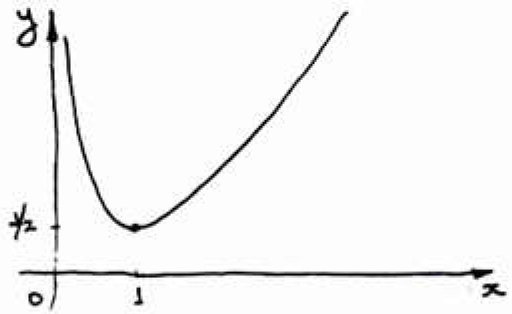
$\boxed{\text{Q } 1^a \text{ D}}$

	0		1	
f'	//	$-$	0	$+$
f	//	estrit. decresc.		estrit. crescente

f admite um mínimo relativo estrito (que também é mínimo absoluto) p/ $x=1$; $f(1) = \frac{1}{2}$ (valor mínimo)

$f''(x) = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$ (não há ponto crítico p/ inflexão, e portanto não há pontos de inflexão).

	0	
f''	//	$+$
f	//	estrit. convexa



Resposta:

a) $\text{Dom } f =]0,+\infty[$; $\text{Im } f = [1/2, +\infty[$

b) f é contínua em $]0,+\infty[$

c) ver quadros acima

d) Ponto de mínimo relativo estrito: $(1, 1/2)$
Não há ponto de máximo relativo

$\boxed{\text{10ª QUESTÃO}}$

Para $k > 1$:

$$(n+1)^{\overline{k+1}} = (n+1)(n+2)\dots(n+k)(n+k+1)$$

$$n^{\overline{k+1}} = n(n+1)\dots(n+k)$$

$$\Rightarrow (n+1)^{\overline{k+1}} - n^{\overline{k+1}} = \underbrace{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}_{k}(n+k+1) - n\underbrace{(n+1)\dots(n+k)}_{k} =$$

$$= (n+1)(n+2)\dots(n+k)\left[(n+k+1)-n\right] =$$

$$= (n+1)^{\overline{k}}.(k+1)$$

Para $k = 1$:

$$(n+1)^{\overline{k+1}} - n^{\overline{k+1}} = (n+1)^{\overline{2}} - n^{\overline{2}} = (n+1)(n+2) - (n).(n+1) =$$

$$= (n+1).\left[(n+2)-n\right] = (n+1)^{\overline{1}}.2 = (n+1)^{\overline{k}}.(k+1)$$

Logo, a afirmativa é válida para $k \geq 1$, k inteiro