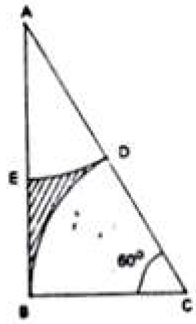
IME – CEE 89/90 | MATEMÁTICA | FOLHA 1

1a. QUESTÃO | VALOR: 1,0

Determine a área, sombreada na figura, sabendo que o triângulo ABC é retângulo em B e que a hipotenusa deste mede 10 cm.



IME – CEE 89/90 | MATEMÁTICA | FOLHA 2

2a. QUESTÃO | VALOR: 1,0

Calcule:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right)$$

IME – CEE 89/90 | MATEMÁTICA | FOLHA 3

3a. QUESTÃO | VALOR: 1,0

Determine o volume de uma pirâmide quadrangular regular sabendo que a seção plana, que passa por duas arestas laterais opostas, é um triângulo equilátero inscritível em um círculo de $4\sqrt{3}$ cm de raio.

IME – CEE 89/90 | MATEMÁTICA | FOLHA 4

4a. QUESTÃO | VALOR: 1,0

Os coeficientes dos 5º, 6º e 7º termos do desenvolvimento $(x+1)^n$ estão, nesta ordem, em P.A. Determine n.

IME – CEE 89/90 | MATEMÁTICA | FOLHA 6

5a. QUESTÃO | VALOR: 1,0

Determine todas as matrizes X reais, 2 x 2 tais que:

$$X^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

IME - CEE 89/90	MATEMÁTICA	FOLHA 8
6a. QUESTÃO		VALOR: 1,0

Esboce o gráfico de

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

indicando o domínio, as regiões de crescimento, a concavidade e as assíntotas.

IME - CEE 89/90	MATEMÁTICA	FOLHA 10
7a. QUESTÃO		VALOR: 1,0

De cada ponto do círculo $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$, traça-se uma perpendicular sobre o diâmetro paralelo ao eixo $\overrightarrow{OY}$. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos médios destas perpendiculares.

IME - CEE 89/90	MATEMÁTICA	FOLHA 11
8a. QUESTÃO		VALOR: 1,0

RESOLVA O SISTEMA ABAIXO:

$$\begin{cases} \log_x e + \log_y e = \frac{7}{3} \\ \ln xy = \frac{7}{2} \end{cases}$$

IME - CEE 89/90	MATEMÁTICA	FOLHA 12
9a. QUESTÃO		VALOR: 1,0

Resolva a equação $3x^3 - 13x^2 + 18x - 8 = 0$ sabendo que se x_1, x_2 e x_3 são, respectivamente, as raízes então $\frac{2}{x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3}$.

IME - CEE 89/90	MATEMÁTICA	FOLHA 13
10a. QUESTÃO		VALOR: 1,0

Resolva a equação

$$(z + i)^3 - (z - i)^3 = 0, \quad \text{onde,}$$

$$z = x + y\,i, \; x, y \in \mathbb{R} \quad e \quad i = \sqrt{-1}$$

GABARITO – IME-89/90 – militares

① $AB = AC \operatorname{sen} 60^\circ = 5\sqrt{3}$ cm ; $BC = AC \cos 60^\circ = 5$ cm $= DC$

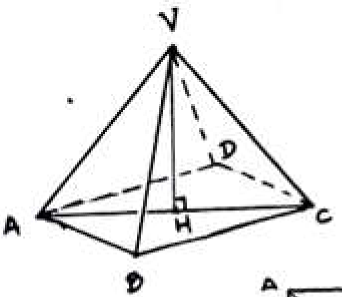
$\Rightarrow AD = AC - DC = 5$ cm

$$S = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle EBD} - S_{\triangle ADE} = \frac{5.5\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi.5^2}{12} - \frac{\pi.5^2}{6} = \frac{25\sqrt{3}}{2} - \frac{25\pi}{4} =$$

$$= \frac{25}{4}(2\sqrt{3} - \pi) \text{ cm}^2$$

② $$\lim_{x \to 0}\left(\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

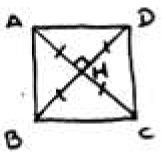
③



$\Delta VAC \equiv \Delta VBD$ equiláteros $\Rightarrow VA = VC = AC =$
$= VB = VD = BD = x$

$x = 2R \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 2.4\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 12$ cm

$VH = \frac{x\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm



$S_{ABCD} = \frac{x.x}{2} = 72 \text{ cm}^2$

$V_{V\text{-}ABCD} = \frac{72.6\sqrt{3}}{3} = 144\sqrt{3} \text{ cm}^3$

④ $T_{p+1} = C_m^p \, 1^p \, x^{m-p} = C_m^p \, x^{m-p}$

$p=4 \Rightarrow T_5 = C_m^4 \, x^{m-4}$

$p=5 \Rightarrow T_6 = C_m^5 \, x^{m-5}$

$p=6 \Rightarrow T_7 = C_m^6 \, x^{m-6}$

$2C_m^5 = C_m^4 + C_m^6$

$$\frac{2\,\cancel{m!}}{5!\,(m-5)!} = \frac{\cancel{m!}}{4!\,(m-4)!} + \frac{\cancel{m!}}{6!\,(m-6)!} \quad [\times 6!\,(m-4)!]$$

$2\times 6\,(m-4) = 6\times 5 + (m-4)(m-5) \Rightarrow m^2 - 21m + 98 = 0$

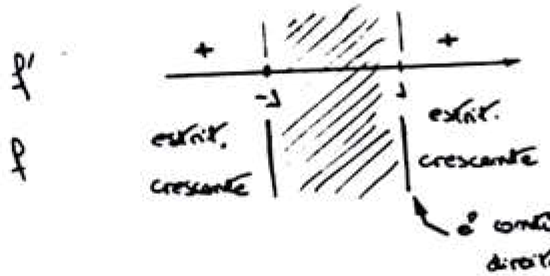
$m = 7$ ou $m = 14$

⑥ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

$\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$ $\qquad$ Dom $f =]-\infty,-1[\cup [1,+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} \cdot \dfrac{(x+1).1-(x-1).1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} = \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^3(x-1)}} =$

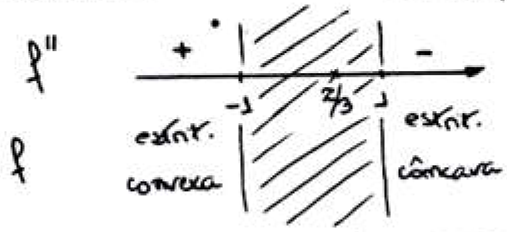
$= \left[(x+1)^3(x-1)\right]^{-1/2}$ $\qquad$ (não há pontos críticos)



f é estritamente crescente em $]-\infty,-1[$ e em $[1,+\infty[$

$f''(x) = -\frac{1}{2}\left[(x+1)^3(x-1)\right]^{-3/2}\left[(x+1)^3.1+3(x+1)^2(x-1)\right] = \dfrac{-(x+1)^2\left[(x+1)+3(x-1)\right]}{2\sqrt{(x+1)^9(x-1)^3}} =$

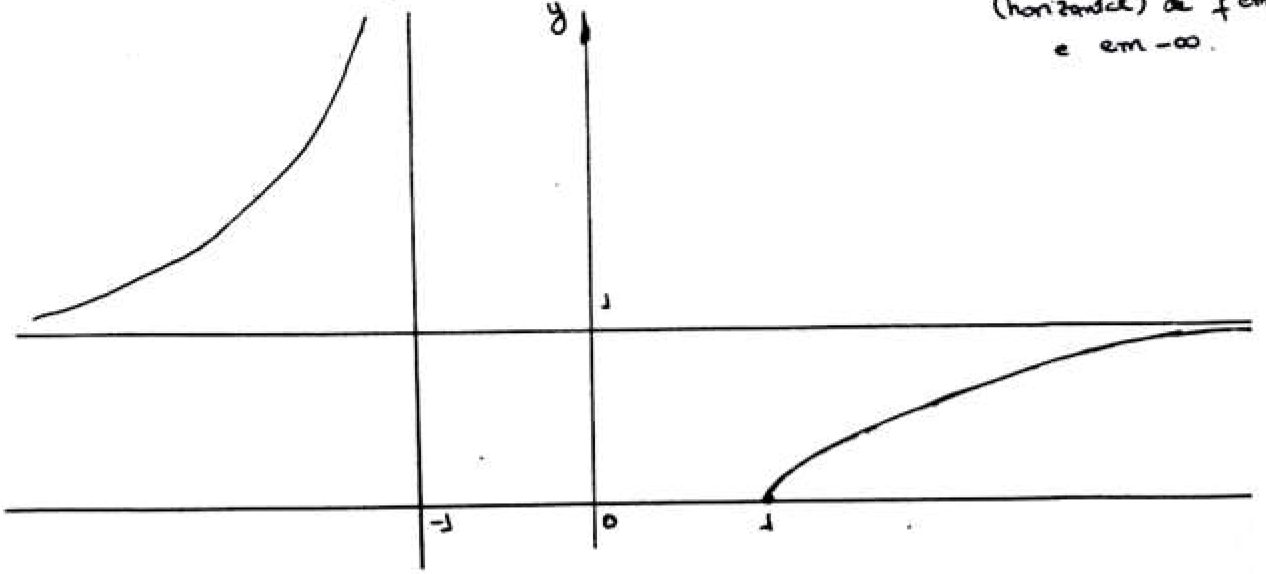
$= \dfrac{-3x+2}{2\sqrt{(x+1)^5(x-1)^3}}$ $\qquad$ (não há pontos críticos para inflexão - notar que $x = 2/3 \notin$ Dom f)



f é estritamente convexa em $]-\infty,-1[$ e estritamente côncava em $[1,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x-1 \to -2}{x+1 \to 0^-}} = +\infty$ $\to$ a reta de eq. $x=-1$ é assíntota vertical de f

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{\dfrac{1-1/x}{1+1/x}} = 1$ $\to$ a reta de $y=1$ é assínto (horizontal) de f em e em $-\infty$.



(8) RESTRIÇÕES: $x>0,\ x\neq 1,\ y>0,\ y\neq 1$

$$\begin{cases}\log_x e + \log_y e = \frac{7}{3}\\ \ln xy = 7/2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln y} = \frac{7}{3}\\ \ln x + \ln y = \frac{7}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\ln x + \ln y}{\ln x \cdot \ln y} = \frac{7}{3}\\ \ln x + \ln y = 7/2\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\ln x \cdot \ln y = 3/2\\ \ln x + \ln y = 7/2\end{cases} \Leftrightarrow$ $\ln x$ e $\ln y$ são as raízes da eq. $z^2 - \frac{7}{2}z + \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow (\ln x = 3$ e $\ln y = 1/2)$ ou $(\ln x = 1/2$ e $\ln y = 3) \Leftrightarrow$ $\boxed{(x = e^3 \text{ e } y = \sqrt{e}) \text{ ou } (x = \sqrt{e} \text{ e } y = e^3)}$

CONJUNTO-SOLUÇÃO: $S = \{(e^3, \sqrt{e}), (\sqrt{e}, e^3)\}$

(9) $3x^3 - 13x^2 + 18x - 8 = 0$

$$\begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 = \frac{13}{3}\\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{18}{3} = 6\\ x_1x_2x_3 = \frac{8}{3}\\ \frac{2}{x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3}\end{cases}$$

$\frac{2}{x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3} \Rightarrow \frac{x_3 + x_1}{x_1x_3} = \frac{2}{x_2} \Rightarrow \underbrace{x_1x_2 + x_2x_3}_{6 - x_1x_3} = 2x_1x_3 \Rightarrow \boxed{x_1x_3 = 2}$

$2x_2 = \frac{8}{3} \Rightarrow \boxed{x_2 = 4/3}$

$$\begin{cases}x_1 + x_3 = \frac{13}{3} - \frac{4}{3} = 3\\ x_1x_3 = 2\end{cases} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_3 = 2 \text{ (ou vice-versa).}$$

$\Rightarrow$ as raízes são $1, 2$ e $4/3$

(10) $(z+i)^3 = (z-i)^3 \Rightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 = 1 \Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = 1$ (impossível) ou $\frac{z+i}{z-i} = \text{cis } 120°$ ou

ou $\frac{z+i}{z-i} = \text{cis}(-120°) \Rightarrow z = i\,\frac{\text{cis } 120° + 1}{\text{cis } 120° - 1}$ ou $z = i \cdot \frac{\text{cis}(-120°) + 1}{\text{cis}(-120°) - 1}$

$z = i \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{-\sqrt{3} + i}{-3 + \sqrt{3}i} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $z = i \cdot \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{\sqrt{3} + i}{-3 - \sqrt{3}i} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

OUTRO MODO:

$(z+i)^3 - (z-i)^3 = 0$

$(z^3 + 3z^2i - 3z - i) - (z^3 - 3z^2i - 3z + i) = 0$

$6z^2i - 2i = 0 \Rightarrow 3z^2 - 1 = 0 \Rightarrow z = \pm\sqrt{3}/3$